

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ  
НЕИДЕАЛЬНОГО ГАЗА  
И НЕИДЕАЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

---

Ю.Л. КЛИМОНТОВИЧ



Ю. Л. КЛИМОНТОВИЧ

# КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕИДЕАЛЬНОГО ГАЗА И НЕИДЕАЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1975

**Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы.** Климонтович Ю. Л., изд-во «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1975.

В книге впервые дано систематическое изложение кинетической теории неидеального газа и неидеальной плазмы. Основное внимание уделено изложению новых результатов. Традиционный материал изложен лишь в той мере, в какой это необходимо для создания полной картины кинетических процессов в неидеальных системах. Большое внимание уделено, в частности, кинетической теории крупномасштабных флуктуаций — флуктуаций с временами корреляции порядка или больше времени свободного пробега и с длинами корреляции порядка или больше длины свободного пробега. Учет крупномасштабных флуктуаций необходим, например, при построении кинетических уравнений для плотных газов и плазмы и при описании турбулентной плазмы.

Книга состоит из трех частей: I. Кинетическая теория (классическая) неидеального газа. II. Кинетическая теория (классическая) неидеальной полностью ионизованной плазмы. III. Квантовые кинетические уравнения для неидеального газа и неидеальной плазмы. Последняя глава книги посвящена кинетической теории химически реагирующих газов и частично ионизованной плазмы.

Рис. 2. Библ. 176 назв.

*Юрий Львович Климонтович*

**КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ  
НЕИДЕАЛЬНОГО ГАЗА И НЕИДЕАЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ**

М., 1975 г., 352 стр. с илл.

Редактор *Л. П. Русакова*

Техн. редакторы *И. Ш. Аксельрод,* *Е. В. Морозова* Корректор *Н. Б. Румянцева*

Сдано в набор 16/V 1975 г. Подписано к печати 12/XI 1975 г. Бумага 60×90<sup>1/16</sup> № 2. Физ. печ. л. 22. Условн. печ. л. 22. Уч.-изд. л. 21,75. Тираж 5000 экз. Т-18548. Цена книги 1 р. 58 к. Заказ № 710.

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

К 20402—152  
053(02)-75 120-75

© Главная редакция  
физико-математической литературы  
издательства «Наука», 1975.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	7
-----------------------	---

## Часть I

### КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Введение . . . . .	9
<i>Глава 1. Метод функций распределения и метод моментов . . . . .</i>	<i>14</i>
§ 1. Уравнения для функций распределения координат и импульсов частиц одноатомного газа . . . . .	14
§ 2. Приближение парных столкновений . . . . .	19
§ 3. Поляризационное приближение и теория возмущений по взаимодействию атомов газа . . . . .	24
§ 4. Уравнение для фазовой плотности в шестимерном пространстве координат и импульсов . . . . .	27
§ 5. Метод моментов . . . . .	29
§ 6. Приближения первых и вторых моментов. Поляризационное приближение . . . . .	32
§ 7. Уравнения переноса плотности частиц, плотности импульса и плотности кинетической энергии . . . . .	38
<i>Глава 2. Кинетическое уравнение Больцмана для неидеального газа . . . . .</i>	<i>42</i>
§ 8. Некоторые результаты статистической теории равновесного строения неидеального газа . . . . .	42
§ 9. Нелинейные интегральные уравнения для двухчастичной корреляционной функции . . . . .	47
§ 10. Кинетическое уравнение Больцмана для пространственно однородного идеального газа . . . . .	48
§ 11. Свойства интеграла столкновений Больцмана для идеального газа . . . . .	55
§ 12. Кинетическое уравнение Больцмана для неидеального пространственно однородного газа . . . . .	59
§ 13. Интеграл столкновений в приближении теории возмущений. Кинетическое уравнение Ландау . . . . .	63
§ 14. H-теорема Больцмана для неидеального газа . . . . .	65
§ 15. Кинетическое уравнение Больцмана для пространственно неоднородного неидеального газа . . . . .	71
<i>Глава 3. Кинетические уравнения для плотных газов . . . . .</i>	<i>80</i>
§ 16. Проблемы кинетической теории плотных газов . . . . .	80
§ 17. Кинетическое уравнение для неидеального газа с учетом тройных столкновений . . . . .	85
§ 18. Кинетические уравнения для газов средней плотности . . . . .	92



§ 19. О статистическом описании неравновесных процессов в плотных газах . . . . .	101
§ 20. Обобщенное кинетическое уравнение . . . . .	103
<b>Глава 4. Кинетическая теория флуктуаций в газе . . . . .</b>	<b>106</b>
§ 21. Уравнения для сглаженных функций распределения в поляриза- ционном приближении . . . . .	106
§ 22. Уравнение для сглаженной фазовой плотности. Метод моментов	109
§ 23. Случайные источники в кинетическом уравнении Больцмана и в уравнениях газовой динамики . . . . .	121

## Часть II

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕИДЕАЛЬНОЙ ПОЛНОСТЬЮ  
ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ

<b>Введение . . . . .</b>	<b>128</b>
<b>Глава 5. Микроскопические уравнения для полностью ионизованной плазмы. Усреднение микроскопических уравнений . . . . .</b>	<b>132</b>
§ 24. Микроскопические уравнения для полностью ионизованной плазмы . . . . .	132
§ 25. Микроскопические уравнения для кулоновской плазмы . . . . .	135
§ 26. Усреднение микроскопических уравнений . . . . .	136
§ 27. Приближение парных столкновений и поляризационное прибли- жение для плазмы . . . . .	140
§ 28. Уравнения переноса плотности, плотности импульса и плотно- сти кинетической энергии частиц. Уравнения переноса плотно- сти энергии и плотности импульса электромагнитного поля . . . . .	142
<b>Глава 6. Кинетические уравнения для плазмы в приближении первых мо- ментов. Уравнения Власова . . . . .</b>	<b>148</b>
§ 29. Кинетическое описание процессов в бесстолкновительной плазме	148
§ 30. Линейное приближение . . . . .	151
§ 31. Электрическая проводимость и диэлектрическая проницаемость бесстолкновительной плазмы . . . . .	153
§ 32. Волновые свойства бесстолкновительной плазмы . . . . .	159
<b>Глава 7. Кинетические уравнения для идеальной полностью ионизованной плазмы . . . . .</b>	<b>164</b>
§ 33. Ограничения, необходимые для вывода кинетических уравнений	164
§ 34. Спектральные плотности флуктуаций источников в идеальной плазме . . . . .	168
§ 35. Спектральные плотности флуктуаций в идеальной плазме . . . . .	170
§ 36. Спектральные плотности флуктуаций в равновесной плазме . . . . .	173
§ 37. Кинетическое уравнение Балеску — Ленарда . . . . .	178
§ 38. Кинетическое уравнение Ландау . . . . .	182
§ 39. Спектральные плотности флуктуаций в релятивистской плазме . . . . .	185
§ 40. Кинетические уравнения для релятивистской плазмы . . . . .	193
<b>Глава 8. Влияние внешних полей на кинетические свойства плазмы . . . . .</b>	<b>198</b>
§ 41. Уравнения для функций $f_a$ , $\delta N_a$ при наличии внешнего элек- трического поля . . . . .	198
§ 42. Спектральные плотности флуктуаций источников при наличии вы- соочастотного электрического поля . . . . .	199

§ 43. Спектральная плотность флуктуаций электрического поля . . .	202
§ 44. Кинетические уравнения для плазмы в высокочастотном электрическом поле . . .	205
§ 45. Проводимость плазмы в сильном высокочастотном электрическом поле . . .	208
§ 46. Низкие частоты . . .	211
§ 47. Эффективный потенциал, учитывающий усредненную динамическую поляризацию плазмы . . .	215
§ 48. Электрическая проводимость. Эффективное (действующее) поле . . .	217
§ 49. Флуктуации при наличии магнитного поля . . .	220
§ 50. Кинетические уравнения для плазмы при наличии внешнего магнитного поля . . .	227
<b>Глава 9. Пространственно однородная неидеальная плазма . . .</b>	<b>231</b>
§ 51. Спектральные плотности нестационарных процессов . . .	231
§ 52. Спектральные плотности флуктуаций источников в неидеальной плазме . . .	236
§ 53. Кинетическое уравнение Ландау для неидеальной плазмы . . .	240
§ 54. Кинетическое уравнение Балеску — Ленарда для неидеальной плазмы . . .	244
§ 55. Интеграл столкновений для неидеальной плазмы с учетом усредненной динамической поляризации . . .	250
§ 56. Кинетическое уравнение Больцмана для неидеальной плазмы . . .	253
§ 57. Взаимодействие заряженных частиц с плазмонами . . .	260
<b>Глава 10. Пространственно неоднородная неидеальная плазма . . .</b>	<b>266</b>
§ 58. Связь интеграла столкновений со спектральной плотностью флуктуаций . . .	266
§ 59. Интеграл столкновений . . .	268
§ 60. Свойства интеграла столкновений . . .	269
<b>Глава 11. Кинетическая теория флуктуаций в плазме . . .</b>	<b>274</b>
§ 61. Уравнения для сглаженной фазовой плотности и поля . . .	274
§ 62. Метод моментов. Поляризационное приближение . . .	276
§ 63. Спектральные плотности крупномасштабных флуктуаций . . .	280
§ 64. Кинетические уравнения для плазмы с учетом крупномасштабных флуктуаций . . .	285
§ 65. Газодинамические уравнения с учетом крупномасштабных флуктуаций . . .	287

### Часть III

#### КВАНТОВЫЕ КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕИДЕАЛЬНОГО ГАЗА И НЕИДЕАЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

Введение . . .	289
<b>Глава 12. Квантовые кинетические уравнения для неидеального газа . . .</b>	<b>291</b>
§ 66. Цепочка уравнений для квантовых функций распределения. Приближение парных столкновений . . .	291
§ 67. Уравнения переноса и термодинамические функции для неидеального газа . . .	296
§ 68. Две формы записи квантового интеграла столкновений . . .	298
§ 69. Приближение теории возмущений . . .	300
§ 70. Квантовый интеграл столкновений Больцмана для неидеального газа с учетом обменных эффектов . . .	302

<b>Глава 13. Квантовые кинетические уравнения для плазмы . . . . .</b>	<b>307</b>
§ 71. Оператор фазовой плотности . . . . .	307
§ 72. Уравнения для моментов . . . . .	310
§ 73. Поляризационное приближение . . . . .	312
§ 74. Квантовый интеграл столкновений в поляризационном приближении . . . . .	313
§ 75. Эффективный потенциал. Псевдопотенциал . . . . .	316
§ 76. Квантовое кинетическое уравнение Больцмана для неидеальной плазмы . . . . .	320
§ 77. Термодинамические функции неидеальной плазмы . . . . .	321
§ 78. Обменные эффекты . . . . .	324
<b>Глава 14. Кинетические уравнения для химически реагирующих газов и частично ионизованной плазмы . . . . .</b>	<b>328</b>
§ 79. Частично ионизованная плазма. Исходная модель . . . . .	328
§ 80. Кинетические уравнения для функций распределения электронов, ионов и атомов . . . . .	331
§ 81. Химически реагирующие газы. Исходная модель . . . . .	339
§ 82. Кинетические уравнения для химически реагирующих газов . . . . .	340
§ 83. Уравнения для концентраций свободных и связанных заряженных частиц. Коэффициенты ионизации и рекомбинации . . . . .	342
§ 84. Влияние флуктуаций электромагнитного поля на кинетические процессы в частично ионизованной плазме . . . . .	343
<b>Литература . . . . .</b>	<b>346</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

По кинетической теории газов и плазмы написано уже много различных книг. Что же побудило автора написать в дополнение к существующим книгам еще одну?

Основу современной статистической теории неравновесных процессов в газах и плазме составляют известные работы Н. Н. Боголюбова, М. Борна, А. А. Власова, Х. Грина, И. Кирквуда, И. Ивопа, Л. Д. Ландау, И. Р. Пригожина. В книге сделана попытка дать некоторое развитие идей и методов этих работ с целью более полного описания кинетических процессов в неидеальных газах и плазме и развития кинетической теории крупномасштабных флуктуаций. Последняя необходима для построения последовательной теории турбулентных явлений, определяющих, в частности, аномальные диссипативные процессы.

Естественно, что наиболее простой является теория слабо неидеальных газов и плазмы, когда возможно использование малых параметров: параметра плотности и плазменного параметра. Для более плотных систем, как и в равновесной теории, используются модельные уравнения. В этом направлении в настоящее время делаются лишь первые шаги.

Изложение ведется по пути последовательного обобщения кинетической теории идеальных газов и плазмы. При этом постепенно ослабляются ограничения, которые обычно делаются при выводе кинетических уравнений. Книга в основном написана доступно, поэтому она будет полезна не только научным сотрудникам, но и преподавателям, аспирантам и студентам старших курсов различных физических специальностей.

Книга состоит из трех частей. Первая часть посвящена классической кинетической теории неидеальных газов, вторая — классической кинетической теории неидеальной полностью ионизованной плазмы, третья — квантовой кинетической теории неидеальных газов и плазмы. Заключительная глава книги посвящена краткому изложению кинетической теории химически реагирующих газов и частично ионизованной плазмы. Эта глава включена в книгу с целью показать возможное направление развития изложенной в книге теории и привлечь внимание к этой важной и интересной проблеме.

Основное внимание в книге уделено принципиальным вопросам кинетической теории. Приложения занимают сравнительно мало места. Везде, где это возможно, указана дополнительная литература.

В некоторых разделах книги использованы результаты работ, написанных совместно с моими учениками и товарищами: В. В. Белым, Ю. А. Кухаренко, Вернером Эбелингом, Вольфом Крэфтом, В. А. Пучковым, Е. Ф. Слинко. Совместная работа с ними была для меня не только полезной, но и приятной.

К. П. Гуров был первым читателем моих работ по кинетической теории неидеальных газов и плазмы. Он прочитал также рукопись книги. Я глубоко благодарен ему. Я также искренне благодарен В. В. Белому, Л. М. Горбунову, М. Е. Маринчуку и А. А. Рухадзе, прочитавшим рукопись книги, за замечания и советы.

*Автор*



# КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

---

## ВВЕДЕНИЕ

В основе кинетической теории лежат уравнения для одночастичных функций распределения — кинетические уравнения. Это уравнения Больцмана, Власова, Ландау, Балеску — Ленарда.

Все кинетические уравнения являются приближенными и вследствие этого дают упрощенное (огрубленное) описание статистических процессов в газах и плазме. Степень возможного огрубления зависит от рассматриваемой проблемы. Существуют явления, для описания которых известные кинетические уравнения оказываются слишком грубыми. В связи с этим возникает необходимость ослабления упрощающих предположений с целью получения более общих уравнений.

Так, при выводе кинетического уравнения Больцмана из уравнения Лиувилля или соответствующей ему цепочки уравнений для последовательности функций распределения (уравнений Боголюбова или В — В — G — K — Y — уравнений Боголюбова — Борна — Грина — Кирквуда — Ивона) используется понятие для достаточно разреженного газа малого параметра  $\epsilon$  — параметра плотности. В плазме соответствующим является плазменный параметр  $\mu$ .

Параметры  $\epsilon$  и  $\mu$  характеризуют роль взаимодействия частиц в кинетическом уравнении для газа и плазмы. Взаимодействие частиц играет в кинетических уравнениях двойную роль. Оно определяет, во-первых, релаксационные процессы, приводящие, например, к установлению равновесного состояния. Иными словами, взаимодействие определяет диссипативные процессы в газах и плазме.

Во-вторых, взаимодействие частиц дает определенные вклады в недиссипативные характеристики, примером которых могут служить термодинамические функции: внутренняя энергия, давление, энтропия и т. д. Вклады взаимодействия определяют отличия этих функций от соответствующих функций для идеального газа.

В кинетических уравнениях Больцмана, Ландау, Балеску — Ленарда взаимодействие частиц определяет лишь диссипативные

характеристики. В этом смысле эти уравнения являются кинетическими уравнениями для идеального газа и идеальной плазмы. Одна из задач настоящей книги — построение кинетических уравнений для неидеального газа и неидеальной плазмы. Эти уравнения в рамках определенных моделей: приближение парных столкновений (первое приближение по параметру плотности), поляризационное приближение (первое приближение по плазменному параметру), полностью учитывают вклады взаимодействия как в диссипативные, так и недиссипативные характеристики газа и плазмы [17, 18].

Вторая задача книги — построение кинетических уравнений для плотных газов. Первым шагом здесь является, естественно, построение кинетического уравнения, учитывающего наряду с двойными также и тройные столкновения (второе приближение по параметру плотности).

Кинетическое уравнение для газа с учетом тройных столкновений рассматривалось Чо и Уленбеком (см. в [5]). Для построения кинетического уравнения в этой работе использовалось полученное Боголюбовым выражение для двухчастичной функции распределения в первом приближении по параметру плотности.

Кинетическое уравнение Чо — Уленбека учитывает вклад взаимодействия не вполне согласованно: в диссипативных характеристиках учитывается вклад как двойных, так и тройных столкновений, а в недиссипативных — только двойных столкновений. В книге рассматривается кинетическое уравнение, в котором в приближении тройных столкновений вклад взаимодействия учитывается более полно.

В работе Боголюбова [4] развит метод, позволяющий при выполнении условия полного ослабления начальных корреляций порядка определить двухчастичную функцию распределения в любом приближении по параметру плотности. Казалось бы, это дает возможность построить кинетическое уравнение в любом приближении по плотности, так как интеграл столкновений определяется именно этой функцией. При проведении такой программы возникают, однако, принципиальные трудности.

Исследования, проведенные Вайнштоком [19], Голдманом и Фрименом [20], Дорфманом и Коэном [21], показали, что интегралы столкновений, учитывающие взаимодействия четырех и большего числа частиц, являются расходящимися (см. также [22]).

Возникновение этой трудности потребовало изменения упрощающих предположений, лежащих в основе вывода кинетических уравнений. Оказалось, что требование полного ослабления начальных корреляций за время, много меньшее времени парных столкновений, следует заменить менее жестким требованием частичного ослабления начальных корреляций [23, 24] (гл. 3).

При использовании условия частичного ослабления начальных корреляций из уравнения Лиувилля можно получить уравнение для сглаженной функции распределения всех частиц. Из этого уравнения в свою очередь получается цепочка уравнений, но теперь уже для сглаженных функций распределения. Она отличается от цепочки уравнений Боголюбова тем, что в ней учтена диссипация, обусловленная парными столкновениями. Если цепочку уравнений для сглаженных функций распределения решать при условии полного ослабления начальных корреляций за время, много меньшее времени парных столкновений, то для достаточно разреженного газа мы снова придем к кинетическому уравнению Больцмана.

Для более плотных газов из цепочки уравнений для сглаженных функций следует кинетическое уравнение, не содержащее расходимостей в интегралах столкновений. Расходимость ликвидируется вследствие учета в цепочке уравнений для сглаженных функций распределения диссипации, обусловленной парными столкновениями (§ 18).

Таким путем можно построить кинетические уравнения, учитывающие взаимодействия четырех, пяти и большего числа частиц. Однако такой путь построения все более и более сложных уравнений по мере увеличения плотности газа мало эффективен, так как кинетические уравнения становятся чрезвычайно сложными. Вследствие этого при построении кинетических уравнений для плотных газов используется подход, аналогичный тому, который развит в статистической теории равновесных состояний плотных газов и жидкостей. При этом вместо одного кинетического уравнения для одночастичной функции распределения получается система уравнений для одночастичной функции распределения и бинарной корреляционной функции (§ 19).

На основе цепочки уравнений для сглаженных функций возможно построение кинетических уравнений с учетом вклада в интеграл столкновений крупномасштабных флуктуаций. Использование этих кинетических уравнений позволяет построить уравнения газовой динамики, в которых вязкость и теплопроводность определяются не только столкновениями, но и крупномасштабными флуктуациями.

При выводе кинетического уравнения Больцмана используется фактически предположение о непрерывности процесса столкновений частиц, определяющих интеграл столкновений. Это позволяет считать функцию распределения в кинетическом уравнении детерминированной (нефлуктуирующей). Учет дискретности актов столкновений приводит к флуктуациям функции распределения, которые являются крупномасштабными по сравнению с флуктуациями, определяющими сам интеграл столкновений.

Для описания флуктуаций можно рассматривать кинетическое уравнение Больцмана как уравнение Ланжевена с соответствующим образом определенным источником флуктуаций. Для равновесного состояния идеального газа спектральная плотность флуктуаций источника в уравнении Больцмана была найдена впервые Кадомцевым [25]. Последовательное изложение кинетической теории равновесных и неравновесных флуктуаций в газах также является одной из задач настоящей книги (гл. 4). Кинетическая теория флуктуаций в плазме изложена в гл. 11.

Книга состоит из трех частей. Первая часть посвящена классической кинетической теории неидеальных газов, вторая часть — классической кинетической теории неидеальной плазмы, третья — квантовой кинетической теории неидеальных газов и плазмы.

Кинетическая теория неидеальной плазмы, естественно, значительно сложнее, чем кинетическая теория газов. Здесь возникает целый ряд новых проблем. Одна из них связана с построением кинетических уравнений для неидеальной плазмы с учетом сильных взаимодействий частиц на малых расстояниях (приближение парных столкновений) и коллективных взаимодействий частиц на больших расстояниях (поляризационное приближение).

Третья часть книги посвящена квантовой кинетической теории неидеального газа и неидеальной плазмы.

Первая работа, посвященная квантовой кинетической теории неидеального газа, была не вполне удачной (Грин [26]). Более последовательный вывод кинетического уравнения Больцмана для неидеального газа был проведен в работах Каданова и Бейма [7], Бэрвинкеля и Гроссмана [27, 28], Климонтовича и Эбелинга [29].

Для описания кинетических процессов в идеальной плазме используются либо кинетическое уравнение Боголюбова — Гурова [30], которое является квантовым аналогом классического уравнения Ландау, либо уравнение, которое является квантовым аналогом классического уравнения Балеску — Ленарда (Балеску [32], Силип [31]).

Квантовое кинетическое уравнение для неидеальной плазмы с учетом сильного взаимодействия на малых расстояниях и усредненной динамической поляризации на больших расстояниях рассмотрено в работе Климонтовича и Эбелинга [29].

Значительно более трудной является задача построения кинетических уравнений для химически реагирующих газов и кинетических уравнений для частично ионизованной плазмы с учетом процессов ионизации и рекомбинации. Связано это с необходимостью учета внутренних степеней свободы и с несохранением чисел частиц отдельных компонент.

Кинетическая теория химически реагирующих газов и частично ионизированной плазмы на основе микроскопических уравнений начала развиваться сравнительно недавно. Она разработана значительно меньше, чем кинетическая теория одноатомных газов и кинетическая теория полностью ионизированной плазмы. Краткому изложению этой теории посвящена последняя глава книги.

Эта глава включена в книгу с целью показать возможные пути развития теории, изложенной в предыдущих главах, а также привлечь внимание к этой очень важной и интересной теме. Естественно, что подробное освещение этих вопросов может быть дано лишь в специальной книге.



## МЕТОД ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И МЕТОД МОМЕНТОВ

### § 1. Уравнения для функций распределения координат и импульсов частиц одноатомного газа

С точки зрения механики микроскопическое состояние одноатомного газа в момент времени  $t$  определяется заданием совокупности координат  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$  и импульсов  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N$  всех  $N$  частиц газа.

Для краткости будем использовать обозначения:  $x_i = (\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i)$  — шестимерный вектор, определяющий состояние частицы с номером  $i$  ( $1 \leq i \leq N$ ),  $x = (x_1, \dots, x_N)$  —  $6N$ -мерный вектор, определяющий состояние всех частиц одноатомного газа.

Функцию распределения переменных  $x$  обозначим через  $f_N(x, t)$ . Выражение  $f_N(x, t) dx$  определяет вероятность того, что в момент времени  $t$  значения координат и импульсов частиц заключены в пределах  $dx$  около значения  $x$ . Функция  $f_N$  нормирована так, что  $\int f_N(x, t) dx = 1$ .

Обозначим через  $\Phi(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \equiv \Phi_{ij}$  потенциальную энергию центрального взаимодействия двух атомов с номерами  $i, j$ , а через  $m$  — массу атома. Тогда функцию Гамильтона  $H$  для одноатомного газа можно записать в виде

$$H = \sum_{1 \leq i \leq N} \left( \frac{p_i^2}{2m} + u(\mathbf{r}_i) \right) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \Phi_{ij}, \quad (1.1)$$

где  $u(\mathbf{r}_i)$  — потенциальная энергия атома во внешнем поле.

Функция распределения  $f_N(x, t)$  определяется уравнением Лиувилля

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} + \sum_{1 \leq i \leq N} \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{r}_i} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{p}_i} \right) = 0. \quad (1.2)$$

Используя уравнения Гамильтона для частиц одноатомного газа

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} \equiv \frac{\mathbf{p}_i}{m} \equiv \mathbf{v}_i, \quad \dot{\mathbf{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} = -\sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} + \mathbf{F}_0(\mathbf{r}_i, t), \quad (1.3)$$

уравнение (1.2) можно записать в виде

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} + \sum_{1 \leq i \leq N} \left( \mathbf{v}_i \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{r}_i} + \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{p}_i} \right) = 0. \quad (1.4)$$

Здесь введено обозначение для силы  $\mathbf{F}(\mathbf{r}_i, t)$ , действующей на частицу с номером  $i$ :

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_i, t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \Phi_{ij} + \mathbf{F}_0(\mathbf{r}_i, t), \quad (1.5)$$

где  $\mathbf{F}_0 = -\partial u / \partial \mathbf{r}_i$  — внешняя сила.

В дальнейшем будут использоваться и иные формы записи уравнения Лиувилля.

Введем обозначения для операторов:

$$\hat{\theta}_{ij} = \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} + \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \mathbf{r}_j} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_j}, \quad (1.6)$$

$$\hat{H}_{x_1, \dots, x_s} = \sum_{1 \leq i \leq s} \left( \mathbf{v}_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} + \mathbf{F}_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} \right) - \sum_{1 \leq i < j \leq s} \hat{\theta}_{ij}, \quad (1.7)$$

$$\hat{L}_{x_1, \dots, x_s}^{(0)} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{1 \leq i \leq s} \left( \mathbf{v}_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} + \mathbf{F}_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} \right). \quad (1.8)$$

Используя обозначения (1.6), (1.7), уравнение Лиувилля можно записать в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{1 \leq i \leq N} \left( \mathbf{v}_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} + \mathbf{F}_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} \right) - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \hat{\theta}_{ij} \right) f_N = 0, \quad (1.9)$$

или

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \hat{H}_{x_1, \dots, x_N} \right) f_N = 0. \quad (1.10)$$

Наконец, вводя оператор (1.8), уравнение (1.9) запишем в форме

$$\left( \hat{L}_{x_1, \dots, x_N}^{(0)} - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \hat{\theta}_{ij} \right) f_N = 0. \quad (1.11)$$

Уравнение Лиувилля — линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка, для которого

уравнения характеристик совпадают с системой уравнений Гамильтона (1.3). Вследствие этого решение уравнения Лиувилля требует знания решения системы уравнений движения всех частиц газа, которое не может быть осуществлено из-за очень большого числа частиц в системе.

Таким образом, нет возможности найти общее решение уравнения Лиувилля. В этом, однако, и нет практической необходимости, так как для описания процессов в газе обычно достаточно знать функцию распределения переменных одной и двух частиц, т. е. одночастичную  $f_1(x_1, t)$  и двухчастичную  $f_2(x_1, x_2, t)$  функции распределения. Они связаны с функцией  $f_N(x, t)$  следующим образом:

$$f_1(x_1, t) = V \int f_N(x_1, \dots, x_N, t) dx_2 \dots dx_N, \quad (1.12)$$

$$f_2(x_1, x_2, t) = V^2 \int f_N(x_1, \dots, x_N, t) dx_3 \dots dx_N, \quad (1.13)$$

где  $V$  — объем газа.

Вследствие введения множителей  $V, V^2$  в определениях (1.12), (1.13) (удобство такого определения проявится в дальнейшем) функции  $f_1, f_2$  нормированы следующим образом:

$$\frac{1}{V} \int f_1 dx_1 = 1, \quad \frac{1}{V^2} \int f_2 dx_1 dx_2 = 1. \quad (1.14)$$

Подобным же образом определяется функция распределения  $f_s(x_1, \dots, x_s, t)$  комплекса  $s$  частиц:

$$f_s = V^s \int f_N dx_{s+1} \dots dx_N, \quad \frac{1}{V^s} \int f_s dx_1 \dots dx_s = 1. \quad (1.15)$$

Из определений (1.12), (1.15) следует, что  $\frac{1}{V} f_1 dx_1$  определяет вероятность того, что координаты и импульсы первой частицы заключены в пределах  $dr_1, dp_1$  около значений  $r_1, p_1$  при произвольных значениях координат и импульсов остальных частиц.

Выражение  $\frac{1}{V^2} f_2 dx_1 dx_2$  определяет вероятность того, что координаты и импульсы двух частиц лежат в пределах  $dr_1, dp_1, dr_2, dp_2$  и т. д. около значений  $r_1, p_1, r_2, p_2$ , при произвольных значениях координат и импульсов остальных частиц и т. д.

Покажем, что средние значения функций, наиболее важных для описания газодинамических процессов, можно найти, зная только функцию распределения  $f_1$ .

В газовой динамике основными характеристиками являются плотность числа частиц, плотность импульса (или скорость) и плотность кинетической энергии (или температура). В нестационарном состоянии эти величины являются функциями координат

и времени, т. е.

$$n = n(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad W = W(\mathbf{r}, t).$$

Здесь  $W$  — плотность кинетической энергии.

Величины  $n$ ,  $n\mathbf{u}$ ,  $W$  являются средними значениями соответствующих микроскопических величин  $n^M$ ,  $(n\mathbf{u})^M$ ,  $W^M$ , которые могут быть определены следующим образом:

$$\begin{aligned} n^M(\mathbf{r}, t) &= \sum_{1 \leq i \leq N} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)), \quad (n\mathbf{u})_{rt}^M = \sum_{1 \leq i \leq N} \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)), \\ W^M(\mathbf{r}, t) &= \sum_{1 \leq i \leq N} \frac{p_i^2}{2m} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Используя формулу  $\bar{A} = \int A(x) f_N(x, t) dx$  для нахождения средних значений и принимая во внимание свойства  $\delta$ -функций  $\int \delta(x - x') dx' = 1$ ,  $\int f(x') \delta(x - x') dx' = f(x)$ , получим

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}, t) &= \int \sum_{1 \leq i \leq N} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) f_N dx = N \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1(t)) f_N dx = \\ &= \frac{N}{V} \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{p}_1 = \frac{N}{V} \int f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) &= \frac{N}{V} \int \frac{\mathbf{p}}{m} f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}, \\ W(\mathbf{r}, t) &= \frac{N}{V} \int \frac{p^2}{2m} f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Из выражений (1.17), (1.18) следует, что для статистического определения газодинамических переменных достаточно знать лишь одночастичную функцию распределения  $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ . Множитель  $N/V$ , входящий в выражения (1.17), (1.18), определяет среднее по всему объему число частиц в единице объема. Обозначим эту величину через  $n$ . Таким образом,  $N/V = n$ . Величина  $1/n$  определяет объем, приходящийся в системе на один атом.

Поскольку для определения средних значений многих важнейших величин достаточно знать только первую функцию распределения, то естественно стремление получить уравнение, которое содержало бы лишь эту функцию  $f_1$ .

Чтобы найти уравнение для функции  $f_1$ , умножим уравнение (1.4) для  $f_N$  на  $V$  и проинтегрируем по переменным всех частиц, кроме первой. Рассмотрим результат интегрирования отдельных

членов уравнения (1.4):

$$V \int \frac{\partial f_N}{\partial t} dx_2 \dots dx_N = \frac{\partial f_1}{\partial t}.$$

Здесь использовано определение (1.12) функции  $f_1$ . При интегрировании второго члена следует помнить, что функция распределения обращается в нуль в точках на границе объема, в котором заключена рассматриваемая система. Учитывая это, получим

$$V \int \sum_{1 \leq i \leq N} v_i \frac{\partial f_N}{\partial r_i} dx_2 \dots dx_N = v_1 \frac{\partial f_1}{\partial r_1}.$$

При интегрировании последнего члена используем то обстоятельство, что функция распределения обращается в нуль при бесконечных значениях импульсов, а также определение (1.13) функции распределения  $f_2$ :

$$\begin{aligned} V \int \sum_{1 \leq i \leq N} \frac{\partial}{\partial r_i} \left( \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ i \neq j}} \Phi_{ij} \right) \frac{\partial f_N}{\partial p_i} dx_2 \dots dx_N = \\ = V(N-1) \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial r_1} \frac{\partial f_N}{\partial p_1} dx_2 \dots dx_N = \frac{N-1}{V} \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial r_1} \frac{\partial f_2}{\partial p_1} dx_2. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $N \gg 1$ , и используя обозначение  $n = N/V$ , получим в результате следующее уравнение для одночастичной функции распределения:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial r_1} + F_0 \frac{\partial}{\partial p_1} \right) f_1 \equiv \hat{L}_{x_1}^{(0)} f_1 = \\ = n \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial r_1} \frac{\partial f_2(x_1, x_2, t)}{\partial p_1} dx_2. \quad (1.19) \end{aligned}$$

Здесь использовано обозначение (1.8). Мы видим, что это уравнение не является замкнутым уравнением для функции  $f_1$ , так как в него входит двухчастичная функция распределения. Аналогичным путем, интегрируя уравнение (1.4) по всем переменным, кроме переменных двух частиц, при  $N \gg 1$  получим уравнение для функции  $f_2$ :

$$\begin{aligned} (\hat{L}_{x_1, x_2}^{(0)} - \hat{\theta}_{12}) f_2 = n \int \left( \frac{\partial \Phi_{13}}{\partial r_1} \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial \Phi_{23}}{\partial r_2} \frac{\partial}{\partial p_2} \right) f_3 dx_3 \equiv \\ \equiv n \int (\hat{\theta}_{13} + \hat{\theta}_{23}) f_3 dx_3. \quad (1.20) \end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения (1.6), (1.8).

Таким образом, и уравнение для функции  $f_2$  не является замкнутым, так как в него входит функция распределения  $f_3$ . В уравнении для функции  $f_3$  входит функция  $f_4$  и т. д. В результате мы



получаем зацепляющуюся цепочку уравнений и, следовательно, для определения функции  $f_1$  в конечном счете надо знать функцию распределения всех частиц системы  $f_N$ . Эту последовательность уравнений называют системой уравнений Боголюбова или системой уравнений В — В — G — K — Y (Боголюбова — Борна — Грина — Кирквуда — Ивона).

Уравнение цепочки для функции  $f_s$  ( $1 \leq s < N$ ) можно записать в виде

$$L_{x_1, \dots, x_s}^{(0)} f_s - \sum_{1 \leq i < j \leq s} \hat{\theta}_{ij} f_s = n \sum_{1 \leq i \leq s} \int \hat{\theta}_{i, s+1} f_{s+1} dx_{s+1}. \quad (1.21)$$

Вследствие чрезвычайной сложности цепочки уравнений для последовательности функций распределения  $f_1, f_2, \dots$  естественно стремление получить приближенные замкнутые уравнения для простейших функций распределения. Примером такого уравнения может служить кинетическое уравнение Больцмана — замкнутое уравнение для одночастичной функции распределения  $f_1(\dot{x}_1, t)$ .

Переход от уравнения Лиувилля или цепочки уравнений для функций распределения к более простым замкнутым уравнениям дается ценой более огрубленного описания процессов в рассматриваемой системе. Для исследования возможностей перехода к приближенному описанию необходимо рассмотреть соотношение между основными временными и пространственными параметрами в одноатомном газе.

## § 2. Приближение парных столкновений

Рассмотрим вначале простейшую модель газа, в которой атомы рассматриваются как жесткие шарики диаметра  $r_0$ . Потенциальная энергия атомов в этом случае может быть определена следующим образом:

$$\Phi(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } r > r_0, \\ \infty & \text{при } r \leq r_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Отсюда следует, что атомы не взаимодействуют, если центры атомов находятся на расстоянии, большем  $r_0$ . Взаимодействие — столкновение атомов происходит при сближении центров атомов на расстоянии  $r_0$ . Величина  $r_0$  является одним из основных параметров газа. В качестве второго основного параметра длины можно взять среднее расстояние между атомами  $r_{cp} \sim (1/n)^{1/3}$ .

Из этих двух параметров можно сконструировать безразмерный параметр

$$\varepsilon = nr_0^3 \sim (r_0/r_{cp})^3 \quad (2.2)$$

— параметр плотности.

При атмосферном давлении и комнатной температуре величина  $n \approx 10^{19} \text{ см}^{-3}$ . Для одноатомных газов  $r_0 \approx 2.3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ . При этих значениях  $n$ ,  $r_0$  параметр плотности  $\varepsilon \sim 10^{-5} \ll 1$ . Средняя длина свободного пробега  $l$ , определяющая кинетические коэффициенты в газе, выражается через параметры  $r_0$ ,  $r_{\text{ср}}$ :

$$l = 1 / (\sqrt{2} \pi r_0^2 n) \sim 1 / (n r_0^2) = r_0 / \varepsilon.$$

Таким образом, отношение трех параметров

$$r_0 : r_{\text{ср}} : l \sim 1 : 1/\varepsilon^{1/2} : 1/\varepsilon,$$

и поэтому

$$r_0 \ll r_{\text{ср}} \ll l \text{ при } \varepsilon \ll 1. \quad (2.3)$$

Если параметр плотности  $\varepsilon \ll 1$ , то газ называют разреженным. Предельным случаем разреженного газа является идеальный газ. Если  $\varepsilon \leq 1$ , то газ является плотным.

В разреженном газе можно ограничиться первым приближением по параметру плотности  $\varepsilon$ . При этом надо иметь в виду следующее.

Взаимодействие атомов в газе играет двоякую роль. Оно дает определенный вклад, например, в термодинамические функции газа: внутреннюю энергию газа, энтропию, давление и др. В идеальном газе вклад взаимодействия в термодинамические функции равен нулю. В разреженном газе в термодинамических функциях по сравнению с идеальным газом появляются дополнительные члены, пропорциональные параметру плотности  $\varepsilon$  (см. гл. II). В общем случае вклады взаимодействия в термодинамические функции можно представить в виде рядов по параметру плотности  $\varepsilon$ .

Взаимодействие атомов в газе определяет также релаксационные процессы в газе, например, процесс установления равновесного состояния и различные явления переноса: вязкость, теплопроводность, диффузию и т. д.

Время установления равновесного состояния порядка среднего времени свободного пробега между последовательными столкновениями выделенной частицы:  $\tau_{\text{ст}} = l/v_T$  ( $v_T$  — средняя тепловая скорость). В нулевом приближении по параметру плотности  $\varepsilon$  длина свободного пробега равна бесконечности, так как  $l \sim r_0/\varepsilon$ , и, следовательно, время релаксации бесконечно велико, т. е. процесс релаксации не происходит. Этот результат естествен, так как процесс релаксации определяется взаимодействием частиц, а в нулевом приближении по  $\varepsilon$  взаимодействие не учитывается.

Явления переноса также нельзя описать в нулевом приближении по параметру плотности, так как для перехода к гидродинамическому описанию должно выполняться неравенство  $l \ll L$ ,

где  $L$ , например, — размер системы. В нулевом приближении по  $\epsilon$  длина свободного пробега  $l$  бесконечно велика и условие  $l \ll L$  не может быть выполнено.

Таким образом, для получения кинетических уравнений — замкнутых уравнений для функции  $f_1$ , описывающих процессы релаксации, необходимо при разложении по  $\epsilon$  учитывать по меньшей мере члены первого порядка по параметру плотности. В этом же приближении учитываются и соответствующие вклады взаимодействия в термодинамические функции.

На языке столкновений частиц газа первое приближение по параметру плотности  $\epsilon$  соответствует учету лишь парных столкновений атомов. Это означает, что вклады взаимодействий, при которых на расстояние  $r_0$  сближаются одновременно больше двух частиц, пренебрежимо малы.

Покажем, что в приближении парных столкновений бесконечная (так как в ней  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$ , но  $N/V = \text{const}$ ) цепочка уравнений для функций распределения  $f_1, f_2, \dots$  обрывается на втором уравнении и, следовательно, остается замкнутая система уравнений для двух функций распределения  $f_1, f_2$ . Для этого удобно использовать связь функций распределения  $f_2, f_3 \dots$  с соответствующими корреляционными функциями  $g_2, g_3, \dots$

По определению функции  $g_2$

$$f_2(x_1, x_2, t) = f_1(x_1, t)f_1(x_2, t) + g_2(x_1, x_2, t). \quad (2.4)$$

При  $g_2 = 0$   $f_2 = f_1 f_1$  и, следовательно, частицы «1», «2» статистически независимы.

Функция корреляции трех частиц  $g_3(x_1, x_2, x_3, t)$  определяется равенством

$$f_3 = f_1 f_1 f_1 + f_1(1)g_2(2, 3) + f_1(2)g_2(1, 3) + f_1(3)g_2(1, 2) + g_3. \quad (2.5)$$

Здесь для упрощения записи вся совокупность переменных первой частицы обозначена через 1, второй — через 2, третьей — 3.

При удалении любой из трех частиц на бесконечное расстояние от двух других  $g_3$  обращается в нуль. Пусть для примера в бесконечность удаляется частица «3». Тогда  $g_3 = 0$ . Кроме того,  $g_2(1, 3) = 0$  и  $g_2(2, 3) = 0$  и, следовательно, в (2.5)

$$f_3 = f_1 f_1 f_1 + f_1(3)g_2(1, 2) = f_2(1, 2)f_1(3).$$

Здесь использовано равенство (2.4).

Из определений функций распределения  $f_1, f_2, \dots$  через  $f_N$  (см. (1.15)) следует, что функцию  $f_s$  можно выразить через  $f_{s+1}$  по формуле

$$f_s = \frac{1}{V} \int f_{s+1} dx_{s+1}. \quad (2.6)$$

Отсюда следует, в частности, что

$$f_1 = \frac{1}{V} \int f_2 dx_2, \quad f_2 = \frac{1}{V} \int f_3 dx_3. \quad (2.7)$$

Подставим равенство (2.4) в первое выражение (2.7). С учетом условия нормировки  $\frac{1}{V} \int f_1 dx_1 = 1$  найдем

$$\frac{1}{V} \int g_2 dx_1 = 0, \quad \text{а также} \quad \frac{1}{V} \int g_2 dx_2 = 0. \quad (2.8)$$

Подставляя  $f_3$  из (2.5) во второе равенство (2.7) и учитывая равенства (2.8), найдем, что

$$\frac{1}{V} \int g_3 dx_1 = \frac{1}{V} \int g_3 dx_2 = \frac{1}{V} \int g_3 dx_3 = 0. \quad (2.9)$$

Это свойство корреляционных функций  $g_2, g_3$  будет использовано ниже.

В приближении парных столкновений сближение трех частиц на расстояние  $r_0$  не учитывается, поэтому  $g_3$  в (2.5) в этом приближении можно опустить.

Рассмотрим результат подстановки оставшихся членов из (2.5) в правую часть уравнения (1.20) для функции  $f_2$ , но прежде преобразуем уравнение (1.19) для функции  $f_1$ .

Подставим выражение (2.4) в правую часть уравнения (1.19) и введем обозначение для средней силы, действующей на частицу «1»:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_1, t) = \mathbf{F}_0(\mathbf{r}_1, t) - n \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \int \Phi_{12} f_1(x_2, t) dx_2. \quad (2.10)$$

Здесь первый член определяет внешнюю силу, а второй — среднюю силу, создаваемую окружающими частицами, плотность распределения которых  $n(\mathbf{r}_2, t) = n \int f_1(x_2 t) d\mathbf{p}_2$ .

Запишем уравнение для  $f_1$  в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{F} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \right) f_1 \equiv \hat{L}_{x_1} f_1 = I(x_1, t). \quad (2.11)$$

Оператор  $\hat{L}_{x_1, \dots, x_s}$  отличается от  $\hat{L}_{x_1, \dots, x_s}^{(0)}$  (см. (1.8)) заменой внешней силы  $\mathbf{F}_0$  на  $\mathbf{F}$ .

В уравнении (2.11) введено обозначение

$$I(x_1, t) = n \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial g_2(x_1, x_2, t)}{\partial \mathbf{p}_1} dx_2 \equiv n \int \hat{\theta}_{12} g_2 dx_2. \quad (2.12)$$

Этот член определяет изменение функции распределения за счет корреляции пары частиц «1», «2». В гл. 2 мы увидим, что для рассматриваемой модели твердых шариков корреляция отлична

от нуля лишь при сближении центров частиц на расстояние  $r_0$ , т. е. при столкновении частиц. Вследствие этого выражение (2.12) называют интегралом столкновений.

При  $F_0 = 0$  и при пространственно однородном распределении частиц, когда  $f_1 = f_1(\mathbf{p}_1, t)$  и  $g_2 = g_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t)$ , уравнение (2.11) упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = n \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} g_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2. \quad (2.13)$$

Преобразуем теперь уравнение (1.20) для функции  $f_2$ . Подставим в правую часть этого уравнения выражение (2.5) при  $g_3 = 0$ . Рассмотрим результат подстановки в первый член правой части, содержащий функцию  $\Phi_{13}$ :

$$n \int \frac{\partial \Phi_{13}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} (f_1 f_1 f_1 + f_1(1) g_2(2, 3) + f_1(2) g_2(1, 3) + f_1(3) g_2(1, 2)) d\mathbf{x}_3. \quad (2.14)$$

Первый и последний члены в сумме, используя равенство (2.4), можно записать в виде

$$n \int \frac{\partial \Phi_{13}}{\partial \mathbf{r}_1} f_1(\mathbf{x}_3, t) d\mathbf{x}_3 \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t)}{\partial \mathbf{p}_1}.$$

Перенесем этот член в левую часть уравнения (1.20) и объединим с  $F_0 \partial f_2 / \partial \mathbf{p}_1$ . Используя определение средней силы, получим в результате вклад

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_1, t) \partial f_2 / \partial \mathbf{p}_1. \quad (2.15)$$

Второй член в (2.14) в приближении двойных столкновений следует опустить, так как он отличен от нуля лишь при одновременном сближении трех частиц «1», «2», «3». Действительно, взаимодействие  $\Phi_{13}$  отлично от нуля лишь при сближении частиц «1», «3» на расстояние  $r_0$ , а корреляционная функция  $g_2(2, 3)$  — частиц «2», «3».

Предпоследний член в (2.14), используя определение (2.12) интеграла столкновений  $I$  и уравнение (2.11), можно записать в виде

$$I(\mathbf{x}_1, t) f_1(\mathbf{x}_2, t) = \hat{L}_{\mathbf{x}_1} f_1(\mathbf{x}_1, t) \cdot f_1(\mathbf{x}_2, t). \quad (2.16)$$

В результате подстановки выражения (2.5) во второй член правой части уравнения (1.20), содержащий функцию  $\Phi_{23}$ , вместо (2.15), (2.16) получим соответственно

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_2, t) \partial f_2 / \partial \mathbf{p}_2, \quad I(\mathbf{x}_2, t) f_1(\mathbf{x}_1, t) = \hat{L}_{\mathbf{x}_2} f_1(\mathbf{x}_2, t) \cdot f_1(\mathbf{x}_1, t). \quad (2.17)$$

В результате уравнение (1.20) для функции  $f_2$  в приближении парных столкновений принимает вид

$$\hat{L}_{x_1 x_2} f_2 - \hat{\theta}_{12} f_2 = \hat{L}_{x_1 x_2} f_1(x_1, t) f_1(x_2, t). \quad (2.18)$$

Напомним, что оператор  $\hat{L}_{x_1, \dots, x_s}$  определяется выражением (1.8), если в нем  $F_0 \rightarrow F$ .

Используя равенство (2.4), уравнение (2.18) можно записать в виде

$$\hat{L}_{x_1 x_2} g_2(x_1, x_2, t) - \hat{\theta}_{12} f_2(x_1, x_2, t) = 0. \quad (2.19)$$

Уравнения (2.11), (2.18) (или (2.19)) составляют замкнутую систему для функций распределения  $f_1(x_1, t)$ ,  $f_2(x_1, x_2, t)$  в приближении парных столкновений.

Обратим внимание на структуру уравнений (2.18), (2.19). Левая часть уравнения (2.18) определяет изменение функции  $f_2$  за счет движения пары взаимодействующих частиц. Правая часть уравнения (2.18) не зависит явно от функции  $f_2$  и определяется изменением функций  $f_1(x_1, t)$ ,  $f_1(x_2, t)$  за счет движения невзаимодействующих частиц «1», «2» под действием средней силы. Запись уравнения (2.18) в форме (2.19) показывает явно, что оператор  $\hat{L}_{x_1 x_2}$  действует лишь на корреляционную функцию  $g_2$ , а не на всю функцию  $f_2$ .

При  $F_0 = 0$  и при пространственно однородном распределении частиц уравнение (2.18) упрощается и может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} - \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} - \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) f_2 = \\ = \frac{\partial}{\partial t} f_1(\mathbf{p}_1, t) f_1(\mathbf{p}_2, t). \end{aligned} \quad (2.20)$$

В гл. 2 мы увидим, что в рамках парных столкновений возможны дальнейшие упрощения системы уравнений (2.11), (2.18), позволяющие свести эту систему уравнений для функций  $f_1$ ,  $f_2$  к одному замкнутому уравнению для функции  $f_1$  — кинетическому уравнению Больцмана.

### § 3. Поляризационное приближение и теория возмущений по взаимодействию атомов газа

Приближение парных столкновений, рассмотренное в предыдущем параграфе, является более частным, чем приближение вторых корреляционных функций ( $g_3 = 0$ ). Действительно, при получении уравнения (2.18) мы не только положили  $g_3 = 0$  в выражении (2.5) для функции  $f_2$ , но и опустили еще некоторые

члены, содержащие двухчастичную корреляционную функцию  $g_2$ . Так, при подстановке выражения (2.5) в первый член правой части уравнения (1.20) был опущен в (2.14) член

$$n \int \frac{\partial \Phi_{13}}{\partial r_1} g_2(2, 3) dx_3 \frac{\partial f_1(x_1, t)}{\partial p_1}, \quad (3.1)$$

а при подстановке во второй член правой части (1.20) — член

$$n \int \frac{\partial \Phi_{23}}{\partial r_2} g_2(1, 3) dx_3 \frac{\partial f_1(x_2, t)}{\partial p_2}. \quad (3.2)$$

Эти члены описывают корреляцию окружающих частиц с одной из частиц рассматриваемой пары.

Мы увидим в дальнейшем, что эти члены играют существенную роль в плазме, т. е. в смеси газов заряженных частиц (см. часть II). Взаимодействие заряженных частиц убывает с расстоянием, как  $1/r$ , т. е. значительно медленней, чем взаимодействие нейтральных частиц. Вследствие этого оказывается, что эффективный радиус взаимодействия частиц в плазме (радиус Дебая  $r_D$ ) значительно превышает среднее расстояние между частицами, т. е.  $r_D \gg r_{cp}$ . Это неравенство является обратным по отношению к соответствующему неравенству  $r_0 \ll r_{cp}$  для газа, когда эффективный радиус взаимодействия порядка  $r_0$ .

Таким образом, в приближении вторых корреляционных функций уравнение для двухчастичной функции распределения  $f_2$  имеет вид

$$\begin{aligned} (\hat{L}_{x_1 x_2} - \hat{\theta}_{12}) f_2 - \hat{L}_{x_1 x_2} f_1 f_1 = \\ = n \int (\hat{\theta}_{13} g_2(2, 3) f_1(1) + \hat{\theta}_{23} g_2(1, 3) f_1(2)) dx_3. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Это уравнение отличается от уравнения (2.19), соответствующего приближению парных столкновений, наличием правой части.

Уравнения (2.11), (3.3) также составляют замкнутую систему уравнений для функций распределения  $f_1$ ,  $f_2$ , но теперь в приближении вторых корреляционных функций.

В дальнейшем будут использоваться другие, кроме модели парных столкновений, приближенные уравнения для функции  $f_2$ , которые могут быть получены из уравнения (3.3) при дополнительных предположениях.

Одно из приближений отвечает теории возмущений по взаимодействию частиц. Безразмерным параметром является отношение потенциальной энергии взаимодействия (в некоторой эффективной области расстояний между частицами) к средней кинетической энергии.

Обозначим параметр взаимодействия через  $\eta$  и рассмотрим уравнение для  $f_2$  в первом приближении по  $\eta$ .

При  $\eta \ll 1$   $g_2(1, 2)$  также много меньше единицы, так как корреляционная функция пропорциональна энергии взаимодействия  $\Phi_{12}$ . Вследствие этого правую часть в уравнении (3.3) можно опустить, так как она порядка  $\eta^2$ . В левой части уравнения (3.3) в том же приближении можно в членах с  $\hat{\theta}_{12}f_2$  заменить  $f_2 = f_1f_1 + g_2$  на  $f_1f_1$ . В результате в первом приближении по параметру взаимодействия уравнение для  $g_2$  принимает вид

$$\hat{L}_{x_1x_2}g_2 = \hat{\theta}_{12}f_1f_1. \quad (3.4)$$

Здесь использован оператор  $\hat{\theta}_{12}$  (см. (1.6)).

Такое же уравнение следует и из уравнений (2.18), (2.19). Таким образом, уравнение для  $g_2$  в первом приближении по параметру взаимодействия  $\eta$  может быть получено как из уравнения для  $g_2$ , отвечающего приближению вторых корреляционных функций, так и из более частных уравнений (2.18), (2.19), соответствующих приближению парных столкновений.

Рассмотрим еще одно приближение, которое можно назвать поляризационным приближением. Такое название оправдано тем, что это приближение наиболее эффективно для плазмы при описании процессов, в которых необходимо учитывать поляризацию среды.

Уравнение для функции  $g_2$  в поляризационном приближении также может быть получено из уравнения (3.3) при следующем дополнительном предположении. В членах левой части, содержащих функцию  $\hat{\theta}_{12}f_2$ , можно (как и в приближении теории возмущений)  $f_2 = f_1f_1 + g_2$  заменить на  $f_1f_1$ . Это означает, что в процессе взаимодействия пары частиц влияние корреляции мало, т. е.  $g_2 \ll f_1f_1$ . Однако вклад членов правой части уравнения (3.3) даже при условии  $g_2 \ll f_1f_1$  может быть значительным, если любая из частиц пары «1», «2» взаимодействует сразу с большим числом частиц. Именно такая ситуация характерна для плазмы (см. часть II).

Таким образом, в поляризационном приближении уравнение для  $g_2$  принимает вид

$$\hat{L}_{x_1x_2}g_2 = \hat{\theta}_{12}f_1f_1 + n \int (\hat{\theta}_{13}g_2(2, 3)f_1(1) + \hat{\theta}_{23}g_2(1, 3)f_1(2)) dx_3. \quad (3.5)$$

Это уравнение отличается от уравнения (3.4), соответствующего приближению теории возмущений, наличием членов, учитывающих влияние окружающих частиц, т. е. влияние среды на выделенную пару частиц. Эти члены будем называть поляризационными.



#### § 4. Уравнение для фазовой плотности в шестимерном пространстве координат и импульсов

Микроскопическое состояние в газе определялось заданием в каждый момент времени совокупности координат и импульсов всех частиц  $x_1(t), \dots, x_N(t)$ . Функция распределения  $f_N$  определяет среднее распределение по всем микросостояниям системы.

При описании процессов в плазме, а также и при описании крупномасштабных флуктуаций в газах удобен другой способ задания микросостояния системы. Микросостояние можно считать заданным, если в любой момент времени  $t$  в любой точке  $x = (r, p)$  шестимерного фазового пространства известна плотность  $N(x, t)$ , определенная выражением [8, 18]

$$N(x, t) = \sum_{1 \leq i \leq N} \delta(x - x_i(t)). \quad (4.1)$$

Функция  $N(x, t)$  является микроскопической характеристикой, так как она зависит от значений координат и импульсов всех частиц системы. Величина

$$N(x, t) dx = \sum_{1 \leq i \leq N} \delta(x - x_i(t)) dx \quad (4.2)$$

определяет истинное (не среднее) число частиц в элементе объема  $dx$  шестимерного фазового пространства около точки  $x$ . Эта величина является, естественно, случайной, т. е. зависит от всех  $x_i(t)$ .

Через функцию  $N(x, t)$  могут быть выражены все микроскопические характеристики газа, которые являются симметричными функциями координат и импульсов частиц. Так, например, функция Гамильтона (1.1) можно представить в виде

$$H = \int \frac{p^2}{2m} N(x, t) dx + \frac{1}{2} \int \Phi(|r - r'|) N(x, t) N(x', t) dx dx'. \quad (4.3)$$

Функция Гамильтона (4.3) отличается от (1.1) лишь тем, что в (4.3) включено самовоздействие частиц. В случае необходимости соответствующий член всегда может быть исключен.

Микроскопические функции (1.16) выражаются через функцию  $N(x, t)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} n^m(r, t) &= \int N(x, t) dp, \quad (nu)_{r,t}^m = \int \frac{p}{m} N(x, t) dp, \\ W^m(r, t) &= \int \frac{p^2}{2m} N(x, t) dp. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Через функцию  $N(x, t)$  можно выразить также и микроскопическую силу  $F^m$ , определяемую всеми частицами и внешним

воздействием:

$$F^M(\mathbf{r}, t) = - \int \frac{\partial \Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial \mathbf{r}} N(x', t) dx' + F_0(\mathbf{r}, t). \quad (4.5)$$

Это выражение отличается от (1.5) лишь включением самовоздействия. Уравнение для функции  $N(x, t)$  может быть получено с помощью уравнений движения и имеет вид

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial N}{\partial \mathbf{r}} + F^M(\mathbf{r}, t) \frac{\partial N}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (4.6)$$

Сила  $F^M$  определяется выражением (4.5).

Подставляя (4.5) в (4.6), получим другую форму записи \*):

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + F_0(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} - \int \frac{\partial \Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial \mathbf{r}} N(x', t) dx' \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \times \\ \times N(x, t) = 0. \quad (4.7)$$

Уравнения (4.6), (4.7) могут служить исходными микроскопическими уравнениями для построения статистической теории. Рассмотрим одно следствие уравнения (4.7), выражающее закон сохранения энергии. Умножим уравнение (4.7) на  $\mathbf{p}^2/2m$  и проинтегрируем по  $x$ .

Первый член дает вклад  $(\partial/\partial t) \int (\mathbf{p}^2/2m) N dx$ , определяющий изменение кинетической энергии. Второй член из-за интегрирования по координатам дает нулевой вклад. Последний член после интегрирования по частям по  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{r}$  дает

$$- \int \Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) N(x', t) \mathbf{v} \frac{\partial N(x, t)}{\partial \mathbf{r}} dx dx' = \\ = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int \Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) N(x, t) N(x', t) dx dx'.$$

При переходе к последнему равенству выражение  $\mathbf{v} \partial N / \partial \mathbf{r}$  исключалось с помощью уравнения (4.7). Наконец вклад предпоследнего члена равен  $F_0 \int \mathbf{v} N(x, t) dx$  ( $F_0$  — постоянная сила).

В результате, собирая все вклады, получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \int \frac{\mathbf{p}^2}{2m} N(x, t) dx + \frac{1}{2} \int \Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) N(x, t) N(x', t) dx dx' \right] = \\ = F_0 \int \mathbf{v} N(x, t) dx \equiv n^M(\mathbf{r}_1 t) \mathbf{u}^M F_0, \quad (4.8)$$

которое является уравнением баланса полной энергии системы.

\* Уравнения (4.6), (4.7) являются классическим аналогом соответствующих уравнений для операторных матриц плотности в представлении Гейзенберга (см. § 71 ч. III).

### § 5. Метод моментов

Рассмотрим связь моментов микроскопической фазовой плотности  $N(x, t)$  с функциями распределения и корреляционными функциями.

Используя определение (1.12) функции  $f_1$ , найдем

$$\bar{N}(x, t) = \int \sum_{1 \leq i \leq N} \delta(x - x_i(t)) f_N dx = \frac{N}{V} \int \delta(x - x_1) f_1 dx_1.$$

Отсюда следует, что

$$\bar{N}(x, t) = n f_1(x, t), \quad n = N/V. \quad (5.1)$$

Таким образом, средняя фазовая плотность отличается от функции  $f_1$  лишь нормировкой:

$$\frac{1}{V} \int f_1(x, t) dx = 1, \quad \int \bar{N}(x, t) dx = N.$$

Аналогичным путем находим выражение для второго момента фазовой плотности

$$\overline{N(x, t) N(x', t)} = \frac{N(N-1)}{V^2} f_2(x, x', t) + \delta(x - x') \frac{N}{V} f_1(x, t). \quad (5.2)$$

Он выражается через две функции распределения  $f_1$  и  $f_2$ .

Третий момент выражается через три функции распределения  $f_1, f_2, f_3$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{N(x, t) N(x', t) N(x'', t)} &= \frac{N(N-1)(N-2)}{V^3} f_3(x, x', x'', t) + \\ &+ \frac{N(N-1)}{V^2} [\delta(x - x') f_2(x', x'', t) + \delta(x' - x'') f_2(x'', x, t) + \\ &+ \delta(x'' - x) f_2(x, x', t)] + \frac{N}{V} \delta(x - x') \delta(x' - x'') f_1(x'', t). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Рассмотрим выражения для соответствующих центральных моментов. Введем обозначение для флуктуации фазовой плотности

$$\delta N = N(x, t) - \bar{N}(x, t). \quad (5.4)$$

Учитывая, что  $\overline{\delta N} = 0$ , получим

$$\overline{(\delta N \delta N)_{x, x', t}} = \overline{N(x, t) N(x', t)} - \bar{N}(x, t) \bar{N}(x', t). \quad (5.5)$$

Это выражение является просто определением второго центрального момента. Выразим его через функции  $f_1, g_2$ . Для этого подставим в (5.5) выражения (5.2), (5.1) и используем равенство

(2.4). В результате получим выражение

$$\overline{(\delta N \delta N)}_{x, x', t} = \frac{N(N-1)}{V^2} g_2(x, x', t) + \frac{N}{V} \left( \delta(x-x') f_1(x, t) - \frac{1}{V} f_1(x, t) f_1(x', t) \right). \quad (5.6)$$

Используя условие нормировки (1.14) для функции  $f_1$  и свойства (2.8) для функции  $g_2$ , найдем из (5.6), что

$$\int \overline{(\delta N \delta N)}_{x, x', t} dx' = \int \overline{(\delta N \delta N)}_{x, x', t} dx = 0. \quad (5.7)$$

Эти свойства являются следствием постоянства полного числа частиц  $N$  в системе.

В предельном случае  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$ , но  $N/V = n = \text{const}$  выражения (5.2), (5.6) упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} \overline{N(x, t) N(x', t)} &= n^2 f_2(x, x', t) + \delta(x-x') n f_1(x, t), \\ \overline{(\delta N \delta N)}_{x, x', t} &= n^2 g_2(x, x', t) + \delta(x-x') n f_1(x, t). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Третий центральный момент определяется выражением

$$\begin{aligned} \overline{(\delta N \delta N \delta N)}_{x, x', x'', t} &= \overline{N(x, t) N(x', t) N(x'', t)} - \\ &- \overline{N(x, t) (\delta N \delta N)}_{x', x'', t} - \overline{N(x', t) (\delta N \delta N)}_{x, x'', t} - \\ &- \overline{N(x'', t) (\delta N \delta N)}_{x, x', t} - \overline{N(x, t) N(x', t) N(x'', t)}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

В предельном случае  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$ ,  $n = \text{const}$  из (5.9), (5.3), (5.8), (2.4), (2.5) следует выражение

$$\begin{aligned} \overline{(\delta N \delta N \delta N)}_{x, x', x'', t} &= n^3 g_3(x, x', x'', t) + \\ &+ n^2 [\delta(x-x') g_2(x', x'', t) + \delta(x'-x'') g_2(x'', x, t) + \\ &+ \delta(x''-x) g_2(x, x', t)] + n \delta(x-x') \delta(x'-x'') f_1(x'', t). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Таким образом, третий центральный момент выражается через функции  $f_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$ .

В приведенных здесь выражениях для моментов все множители под знаком усреднения относятся к одному и тому же времени. Такие моменты называются одновременными моментами. Одновременными являются и все рассмотренные выше функции распределения. Рассмотрим определение простейших двухвременных функций распределения и двухвременных моментов.

Одночастичная двухвременная функция распределения определяет вероятность нахождения одной частицы последовательно

в точке  $x$  в момент  $t$  и в точке  $x'$  в момент  $t'$ . Она определяется выражением

$$F_1(x, t, x', t') = V \int \delta(x - x_1(t)) \delta(x' - x'_1(t')) f_N(x', t') dx'. \quad (5.11)$$

Отсюда следуют три равенства. При  $t = t'$

$$F_1(x, t, x', t) = \delta(x - x') f_1(x, t). \quad (5.12)$$

Интеграл от  $F_1$  по  $x$

$$\int F_1(x, t, x', t') dx = f_1(x', t'). \quad (5.13)$$

Наконец, используя теорему Лиувилля  $dx = dx'$ , из которой следует равенство  $f_N(x, t) = f_N(x', t')$ , найдем

$$\int F_1(x, t, x', t') dx' = f_1(x, t). \quad (5.14)$$

Двухчастичная двухвременная функция распределения определяет вероятность нахождения частицы «1» в момент  $t$  в точке  $x$ , а частицы «2» в момент  $t'$  в точке  $x'$ :

$$f_2(x, t; x', t') = V^2 \int \delta(x - x_1(t)) \delta(x' - x_2(t')) f_N(x', t') dx'. \quad (5.15)$$

При  $t = t'$  эта функция совпадает с одновременной функцией распределения  $f_2(x, x', t)$ .

Двухвременной момент по аналогии с (5.2) определяется выражением

$$\overline{N(x, t) N(x', t')} = \frac{N(N-1)}{V^2} f_2(x, t; x', t') + \frac{N}{V} F_1(x, t, x', t'). \quad (5.16)$$

При  $t = t'$  с учетом (5.12) это выражение переходит в (5.2).

Соответствующее выражение для двухвременного центрального момента имеет вид

$$\begin{aligned} \overline{(\delta N \delta N)}_{x, t, x', t'} &= \frac{N(N-1)}{V^2} g_2(x, t; x', t') + \\ &+ \frac{N}{V} \left( F_1(x, t, x', t') - \frac{1}{V} f_1(x, t) f_1(x', t') \right). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Здесь

$$g_2(x, t; x', t') = f_2(x, t; x', t') - f_1(x, t) f_1(x', t') \quad (5.18)$$

— двухвременная двухчастичная корреляционная функция. Она обладает свойствами, аналогичными (2.8). С учетом этих свойств и равенств (5.13), (5.14) из (5.17) находим

$$\int \overline{(\delta N \delta N)}_{x, t, x', t'} dx = \int \overline{(\delta N \delta N)}_{x, t, x', t'} dx' = 0. \quad (5.19)$$

В предельном случае  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$ ,  $n = \text{const}$  выражение (5.17) принимает вид

$$\overline{(\delta N \delta N)}_{x, t; x', t'} = n^2 g_2(x, t; x', t') + n F_1(x, t, x', t'). \quad (5.20)$$

При  $t = t'$  равенства (5.17), (5.20) совпадают соответственно с равенствами (5.6), (5.8).

Аналогичным образом можно определить и более сложные двухвременные моменты и функции распределения.

## § 6. Приближения первых и вторых моментов. Поляризационное приближение

Произведем усреднение по ансамблю каждого из членов уравнения (4.6) для фазовой плотности  $N(x, t)$ . Используя тождество

$$\overline{F^M N(x, t)} = F \overline{N}(x, t) + \overline{(\delta F \delta N)}_{r, x, t}, \quad (6.1)$$

где  $F$  — средняя сила,  $\delta F = F^M - F$ , и учитывая связь функций  $\overline{N}(x, t)$ ,  $f_1(x, t)$  (см. (5.1)), получим следующее уравнение для функции  $f_1(x, t)$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} + F(r, t) \frac{\partial}{\partial p} \right) f_1 = -\frac{1}{n} \frac{\partial \overline{\delta F \delta N}}{\partial p} \equiv I(x, t), \quad (6.2)$$

где  $F(r, t) = F_0 - n \int (\partial \Phi(|r - r'|) / \partial r) f_1(x', t) dx'$ . Это уравнение соответствует уравнению (2.11) для функций  $f_1(x_1, t)$ . Отличие состоит лишь в форме записи интегралов столкновений. В уравнении (2.11) интеграл столкновений выражен через двухчастичную корреляционную функцию, а в (6.2) — через одновременную корреляцию флуктуаций силы и фазовой плотности. Можно, однако, убедиться, что эти формы записи эквивалентны. Действительно, из выражения (4.5) следует, что

$$\delta F(r, t) = - \int \frac{\partial \Phi(|r - r'|)}{\partial r} \delta N(x', t) dx'. \quad (6.3)$$

Отсюда находим соотношение

$$\overline{(\delta F \delta N)}_{r, x, t} = - \int \frac{\partial \Phi(|r - r'|)}{\partial r} \overline{(\delta N \delta N)}_{x', x, t} dx', \quad (6.4)$$

связывающее функции  $\overline{\delta F \delta N}$  и  $\overline{\delta N \delta N}$ . Подставив сюда выражение (5.8), найдем связь функций  $\overline{\delta F \delta N}$ ,  $g_2$  и увидим, что выражение для интеграла столкновений в уравнении (6.2) совпадает с соответствующим выражением в уравнении (2.11).

Уравнение (6.2), как и (2.11), является незамкнутым, так как в него наряду с функцией  $f_1$  входит новая функция  $\overline{\delta F \delta N}$  —

одновременной второй центральный момент флуктуаций силы и фазовой плотности. Из (6.4) видно, что для его определения в общем случае надо знать функцию  $(\overline{\delta N \delta N})_{x, x', t}$ . Запишем для нее соответствующее уравнение. Для этого сначала с помощью уравнений (4.6), (6.2) найдем уравнение для функции  $\delta N(x, t)$ . Оно имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} + F(r, t) \frac{\partial}{\partial p} \right) \delta N(x, t) + \delta F \frac{\partial n^i_1(x, t)}{\partial p} = \\ = - \frac{\partial}{\partial p} [ \delta F(r, t) \delta N(x, t) - \overline{(\delta F \delta N)}_{r, x, t} ]. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Напишем соответствующее уравнение для функции  $\delta N(x', t)$ . Затем первое уравнение умножим на  $\delta N(x', t)$ , второе на  $\delta N(x, t)$ , усредним оба уравнения и сложим. В результате получим искомого уравнение для функции  $(\overline{\delta N \delta N})_{x, x', t}$ , которое, используя определение (1.8) для оператора  $\hat{L}_{xx'}$ , запишем в виде

$$\begin{aligned} \hat{L}_{xx'} \overline{(\delta N \delta N)}_{x, x', t} + \overline{(\delta F \delta N)}_{r, x', t} \frac{\partial n^i_1(x, t)}{\partial p} + \\ + \overline{(\delta N \delta F)}_{x, r', t} \frac{\partial n^i_1(x', t)}{\partial p'} = \\ = - \frac{\partial}{\partial p} \overline{(\delta F \delta N \delta N)}_{r, x, x', t} - \frac{\partial}{\partial p'} \overline{(\delta N \delta F \delta N)}_{x, r', x', t}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Это уравнение снова оказывается незамкнутым, так как в него наряду с функцией  $(\overline{\delta N \delta N})_{x, x', t}$  входят более высокие моменты флуктуаций  $\delta N$ ,  $\delta F$ . Таким образом, получается зацепляющаяся цепочка уравнений для моментов, аналогичная цепочке уравнений В — В — G — K — Y для функций распределения  $f_1, f_2, \dots$

Рассмотрим приближения первых и вторых моментов и сравним приближение вторых моментов с поляризационным приближением.

В приближении первых моментов случайных функций  $F^m(r, t)$ ,  $N(x, t)$  правая часть уравнения (6.2) может быть отброшена и мы получаем замкнутую систему уравнений для средней фазовой плотности  $\bar{N}(x, t) = n f_1(x, t)$  и средней силы  $F(r, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^i_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial r} + F(r, t) \frac{\partial f_1}{\partial p} = 0, \\ F = F_0 - n \frac{\partial}{\partial r} \int \Phi(|r - r'|) f_1(x', t) dx'. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Эту систему можно свести к одному нелинейному уравнению для функции  $f_1$ .

Уравнения (6.7) называются уравнениями с самосогласованным полем. Такое название подчеркивает тот факт, что функция

распределения  $f_1$  определяет среднюю силу, а средняя сила вызывает изменение функции распределения  $f_1$ .

Приближение самосогласованного поля широко применяется для описания процессов в газах заряженных частиц и плазме при условиях, когда характерный размер системы много меньше средней длины свободного пробега. Плазма при таких условиях называется бесстолкновительной плазмой. Уравнения с самосогласованным полем впервые исследовались Власовым и называются уравнениями Власова \*).

В газе обычно вклад второго члена в выражении (6.7) для средней силы пренебрежимо мал, поэтому первое уравнение (6.7) для газа принимает вид

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}_0(\mathbf{r}, t) \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (6.8)$$

Уравнение (6.8) используется для описания процессов в сильно разреженных газах, когда характерный размер системы много меньше длины свободного пробега.

Уравнения (6.7), (6.8), соответствующие приближению первых моментов, не описывают диссипативных (или релаксационных) процессов и, следовательно, с помощью них нельзя описать процесс установления равновесного состояния и необратимые процессы: внутреннее трение, теплопроводность, диффузию.

Невозможность описания диссипативных процессов на основе уравнений (6.7), (6.8) следует из того, что энтропия

$$S(t) = -kn \int f_1(x, t) \ln f_1(x, t) dx, \quad (6.9)$$

где функция  $f_1$  определяется уравнениями (6.7), (6.8), как легко видеть, не меняется во времени, т. е.

$$dS/dt = 0. \quad (6.10)$$

Рассмотрим приближение вторых моментов. Из (6.6), опуская члены, содержащие третьи моменты, получим уравнение

$$\hat{L}_{xx'} (\overline{\delta N \delta N})_{x, x', t} + (\overline{\delta F \delta N})_{r, x', t} \frac{\partial n f_1(x, t)}{\partial \mathbf{p}} + (\overline{\delta N \delta F})_{x, r', t} \frac{\partial n f_1(x', t)}{\partial \mathbf{p}'} = 0. \quad (6.11)$$

Это уравнение может быть получено непосредственно из уравнения (6.5) для  $\delta N$ , если в нем отбросить нелинейные по

\*) Уравнение (6.7) по форме совпадает с точным микроскопическим уравнением (4.6). Такое соответствие хорошо известно в квантовой теории (см. § 72 ч. III). В классической теории на это было обращено внимание Власовым (см. [3] к ч. II, § 13).



флуктуациям члены, и из уравнения для  $\delta F$ :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right) \delta N(\mathbf{x}, t) + \delta F(\mathbf{r}, t) \frac{\partial n f_1(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (6.12)$$

$$\delta F(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int \Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \delta N(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}'.$$

Приближение вторых моментов является не вполне последовательным, так как согласно (5.10) третьи центральные моменты содержат вклад от функций  $f_1, g_2$ , которые определяют и вторые моменты (см. (5.6), (5.8)).

Учтем в уравнении (6.6) вклады в третьи моменты от функций  $g_2$  и  $f_1$  при условии  $g_2 \ll f_1 f_1$ . Тогда вместо уравнения (6.11) получим более общее уравнение, которое удобно записать в виде

$$\hat{L}_{xx'} \overline{(\delta N \delta N)}_{x, x', t} + \overline{(\delta F \delta N)}_{r, x', t} \frac{\partial n f_1(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{p}} + \overline{(\delta N \delta F)}_{x, r', t} \frac{\partial n f_1(\mathbf{x}', t)}{\partial \mathbf{p}'} = \hat{L}_{xx'} \overline{(\delta N \delta N)}_{x, x', t}^{\text{ист}}. \quad (6.13)$$

Здесь введено обозначение

$$\overline{(\delta N \delta N)}_{x, x', t}^{\text{ист}} = n \left[ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') f_1(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{V} f_1(\mathbf{x}, t) f_1(\mathbf{x}', t) \right]. \quad (6.14)$$

В предельном случае  $N \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty, n = \text{const}$

$$\overline{(\delta N \delta N)}^{\text{ист}} = n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') f_1(\mathbf{x}, t). \quad (6.15)$$

Индекс «источник» в выражениях (6.14), (6.15) подчеркивает то, что эти выражения не зависят от вторых моментов, а определяются полностью первой функцией распределения  $f_1$ .

Легко убедиться, что уравнение (6.13) совпадает с уравнением для корреляционной функции  $g_2$  в поляризационном приближении, т. е. с уравнением (3.5). Это естественно, так как при выводе (6.13) предполагалось, что в третьих моментах  $g_3 = 0$  и  $g_2 \ll f_1 f_2$ . При этих предположениях и было получено уравнение (3.5).

Используя уравнение (6.5) для флуктуации фазовой плотности  $\delta N(\mathbf{x}, t)$ , можно построить и цепочку уравнений для двухвременных и многовременных моментов. Чтобы, например, найти уравнение для функции  $\overline{(\delta N \delta N)}_{x, t, x', t'}$ , надо умножить уравнение (6.5) на  $\delta N(\mathbf{x}', t')$  и произвести усреднение. В результате получаем

$$\hat{L}_x \overline{(\delta N \delta N)}_{x, t, x', t'} + \overline{(\delta F \delta N)}_{r, t, x', t'} \frac{\partial n f_1(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{p}} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \overline{(\delta F \delta N \delta N)}_{r, x, t; x', t'}. \quad (6.16)$$

Это уравнение, естественно, также незамкнуто, так как в него входит третий двухвременной момент. В поляризационном приближении, т. е. при  $g_3(x, x'', t; x', t') = 0$ ,  $g_2(x, t; x', t') \ll \ll f_1(x, t)f_1(x', t')$ , уравнение (6.16) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \hat{L}_x (\overline{\delta N \delta N})_{x, t, x', t'} + (\overline{\delta F \delta N})_{r, t, x', t'} \frac{\partial n f_1(x, t)}{\partial p} = \\ = \hat{L}_x (\overline{\delta N \delta N})_{x, t, x', t'}^{\text{нст}} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Здесь использовано обозначение

$$(\overline{\delta N \delta N})_{x, t, x', t'}^{\text{нст}} = n \left( F_1(x, t, x', t') - \frac{1}{V} f_1(x, t) f_1(x', t') \right). \quad (6.18)$$

В предельном случае  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$ ,  $n = \text{const}$

$$(\overline{\delta N \delta N})_{x, t, x', t'}^{\text{нст}} = n F_1(x, t, x', t'). \quad (6.19)$$

Уравнение (6.17) следует решать при начальном условии

$$(\overline{\delta N \delta N})_{x, t, x', t'} \Big|_{t=t'} = (\overline{\delta N \delta N})_{x, x', t}, \quad (6.20)$$

и, следовательно, для решения уравнения (6.17) надо знать решение уравнения (6.13) для одновременного момента. Мы увидим, что при определенных ограничениях такое решение может быть проведено.

Заметим, что в отличие от (6.14), (6.15) выражение для источника  $(\delta N \delta N)_{x, t, x', t'}^{\text{нст}}$  в уравнении (6.17) определяется двухвременной одночастичной функцией распределения  $F_1(x, t, x', t')$ .

Чтобы записать уравнение для этой функции, введем двухвременную фазовую плотность

$$N(x, t, x', t') = \sum_{1 \leq i \leq N} \delta(x - x_i(t)) \delta(x' - x'_i(t')). \quad (6.21)$$

С учетом определения (5.11) из (6.21) следует, что

$$\bar{N}(x, t, x', t') = n F_1(x, t, x', t'). \quad (6.22)$$

Это выражение аналогично (5.1).

Уравнение для двухвременной фазовой плотности имеет вид

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}^{\text{M}}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial p} \right) N(x, t, x', t') = 0. \quad (6.23)$$

Микроскопическая сила  $\mathbf{F}^{\text{M}}(\mathbf{r}, t)$  определяется по-прежнему выражением (4.5). Усредняя это уравнение и используя равенство (6.22), получим уравнение для функции  $F_1$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial p} \right) F_1(x, t, x', t') = \\ = - \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial p} (\overline{\delta F \delta N})_{r, t, x, t, x', t'} \equiv I(x, t, x', t'). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Это уравнение следует решать при начальном условии

$$F_1(x, t, x', t')|_{t=t'} = \delta(x - x') f_1(x, t). \quad (6.25)$$

При получении уравнения (6.24) использовано тождество

$$\overline{(\mathbf{F}^{\text{M}} N)}_{r, t; x, t, x', t'} = \mathbf{F}(r, t) \bar{N}(x, t, x', t') + \overline{(\delta^{\text{V}} \delta N)}_{r, t; x, t, x', t'}, \quad (6.26)$$

в котором  $\delta N(x, t, x', t') = N(x, t, x', t') - \bar{N}(x, t, x', t')$ .

Интеграл столкновений  $I(x, t, x', t')$  в уравнении (6.24) выражается через второй момент флуктуаций  $\delta N(x'', t)$ ,  $\delta N(x, t, x', t')$ . При  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  его можно представить в виде

$$\begin{aligned} \overline{(\delta N \delta N)}_{x, t, x', t'; x'', t} &= \\ &= n \delta(x - x'') F_1(x, t, x', t') + n^2 g_2(x, t, x', t'; x'', t). \end{aligned} \quad (6.27)$$

Это равенство следует из определений (4.1), (6.21) фазовых плотностей  $N(x, t)$ ,  $N(x, t, x', t')$ .

В (6.27) функция  $g_2(x, t, x', t'; x'', t)$  определяет в момент  $t$  корреляцию двух частиц в точках  $x, x''$ . При этом одна из них в момент  $t'$  была в точке  $x'$ . Таким образом, здесь имеет место тройная корреляция двух частиц. При  $t = t'$

$$g_2(x, t, x', t'; x'', t) = \delta(x - x') g_2(x, x'', t). \quad (6.28)$$

Интеграл столкновений в (6.24) играет роль лишь на временах  $t - t' \sim \tau_{\text{ст}}$ . На временах

$$t - t' \ll \tau_{\text{ст}} \quad (6.29)$$

можно положить равной нулю функцию  $g_2(x, t, x', t'; x'', t)$ . Так как первый член из (6.27) не дает вклада в интеграл столкновений  $I(x, t, x', t')$ , то в этом приближении  $I(x, t, x', t') = 0$  и, следовательно, уравнение для функции  $F_1$  имеет вид

$$\hat{L}_x n F_1(x, t, x', t') \equiv \hat{L}_x \overline{(\delta N \delta N)}_{x, t, x', t'}^{\text{уст}} = 0. \quad (6.30)$$

Здесь использовано равенство (6.19).

Итак, уравнение (6.17) в поляризационном приближении и при условии (6.29) имеет вид

$$\hat{L}_x \overline{(\delta N \delta N)}_{x, t, x', t'} + \overline{(\delta \mathbf{F} \delta N)}_{r, t, x', t'} \frac{\partial n_1}{\partial p} = 0. \quad (6.31)$$

Его следует решать при начальном условии (6.20)\*.

Таким образом, для определения двухвременного момента надо предварительно решить уравнение (6.13). Эта задача в общем случае сложна. Она может быть значительно упрощена, если

\* Уравнение (6.31) описывает мелкомасштабные флуктуации (условие (6.29)). Его форма соответствует гипотезе Онзагера о временной эволюции флуктуаций.

в качестве исходного уравнения использовать уравнение (6.12) для  $\delta N$  с источником, эквивалентным источнику в уравнении (6.13), т. е. уравнение

$$\hat{L}_x (\delta N(x, t) - \delta N^{\text{ист}}(x, t)) + \delta F(r, t) \frac{\partial n_1^c}{\partial p} = 0. \quad (6.32)$$

Корреляция флуктуаций источника определяется уравнением (6.30). Запишем его в развернутом виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \overline{(\delta N \delta N)}_{x, t, x', t'}^{\text{ист}} = 0. \quad (6.33)$$

Это уравнение следует решать при начальном условии

$$\overline{(\delta N \delta N)}_{x, t, x', t'}^{\text{ист}} \Big|_{t=t'} = n \left( \delta(x - x') f_1(x, t) - \frac{1}{V} f_1(x, t) f_1(x', t) \right). \quad (6.34)$$

Мы увидим в §§ 34—39, что таким путем можно сравнительно просто найти выражения для двухвременных и одновременных корреляций, не решая интегральное уравнение (6.13).

## § 7. Уравнения переноса плотности частиц, плотности импульса и плотности кинетической энергии

Рассмотрим уравнения баланса для плотности частиц  $\rho(\mathbf{r}, t) = mn(\mathbf{r}, t)$ , плотности импульса  $\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  и плотности кинетической энергии  $W(\mathbf{r}, t)$ . Из выражений (4.4), (5.1) найдем связь этих функций с одночастичной функцией распределения  $f_1(x, t)$ :

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) &= mn \int f_1(x, t) d\mathbf{p}, & \rho\mathbf{u} &= n \int \mathbf{p} f_1 d\mathbf{p}, \\ W(\mathbf{r}, t) &= n \int (\mathbf{p}^2/2m) f_1(x, t) d\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Чтобы найти изменения этих величин со временем, умножим уравнение (6.2) последовательно на  $mn$ ,  $n\mathbf{p}$ ,  $n\mathbf{p}^2/2m$  и проинтегрируем по  $\mathbf{p}$ . Рассмотрим по порядку получающиеся таким путем уравнения.

Учитывая, что

$$\int \mathbf{F} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p} = 0, \quad mn \int \mathbf{v} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{p} = \frac{\partial \rho\mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}}$$

и что интеграл от правой части уравнения (6.2) по импульсам равен нулю, получим уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho\mathbf{u} = 0 \quad (7.2)$$

— уравнение баланса плотности частиц.

Второе уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial n m \int v_i v_j f_1 dp}{\partial r_j} = \frac{\rho(r, t)}{m} F_i + n \int p_i I(x, t) dp. \quad (7.3)$$

Преобразуем в этом уравнении второй член левой части. Представим скорость  $\mathbf{v}$  в виде  $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \delta\mathbf{v}$  ( $\delta\mathbf{v}$  — отклонение скорости  $\mathbf{v}$  от средней скорости  $\mathbf{u}$ ). Тогда

$$n m \int v_i v_j f_1 dp = \rho u_i u_j + P_{ij}. \quad (7.4)$$

Здесь введено обозначение для тензора

$$P_{ij} = n m \int \delta v_i \delta v_j f_1 dp \quad (7.5)$$

— тензора внутренних напряжений.

Тензор напряжений в свою очередь можно представить в виде

$$P_{ij} = \delta_{ij} p_{\text{ид}} + \pi_{ij}, \quad p_{\text{ид}} = \frac{1}{3} P_{ii}, \quad (7.6)$$

где

$$p_{\text{ид}} = n m \int (\delta v_i)^2 f_1 dp = \frac{\rho}{m} \kappa T \quad (7.7)$$

— давление идеального газа,

$$\kappa T = \frac{2}{3} \int \frac{m (\delta v)^2}{2} f_1 dp \quad (7.8)$$

— температура,  $\kappa$  — постоянная Больцмана.

Тензор  $\pi_{ij}$  называют тензором вязких напряжений, смысл этого названия станет ясным из дальнейшего.

Используя выражения (7.4) — (7.8), запишем уравнение (7.3) в виде

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_j} (\rho u_i u_j + \delta_{ij} p_{\text{ид}} + \pi_{ij}) = \frac{\rho}{m} F_i + n \int p_i I dp. \quad (7.9)$$

Это есть уравнение баланса плотности импульса, записанное в компонентах.

Последнее уравнение получается из (6.2) умножением на  $n p^2/2m$  и интегрированием по  $\mathbf{p}$ . Оно имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} n \int \frac{\mathbf{p}^2}{2m} f_1 dp + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} n \int \mathbf{v} \frac{\mathbf{p}^2}{2m} f_1 dp = \frac{\rho}{m} \mathbf{F} \mathbf{u} + n \int \frac{\mathbf{p}^2}{2m} I dp. \quad (7.10)$$

Первый член левой части, используя определение температуры (7.8) и средней скорости, можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u^2}{2} + \frac{3}{2} \frac{\rho}{m} \kappa T \right). \quad (7.11)$$

Представим  $\mathbf{v}$  во втором члене (7.10) в виде  $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \delta\mathbf{v}$ , используем определения  $\mathbf{u}$ ,  $T$ ,  $P_{ij}$ ,  $\pi_{ij}$ ,  $\rho_{ид}$  и введем обозначение  $\mathbf{S}$  для вектора теплового потока

$$\mathbf{S} = n \int \delta\mathbf{v} \frac{m(\delta v)^2}{2} f_1 dp. \quad (7.12)$$

В результате второй член левой части уравнения (7.10) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial r_i} \left[ u_i \left( \frac{\rho u^2}{2} + \frac{3}{2} \frac{\rho}{m} \kappa T + p_{ид} \right) + \pi_{ij} u_j + S_i \right]. \quad (7.13)$$

Подставляя (7.13), (7.11) в уравнение (7.10), получим уравнение баланса энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u^2}{2} + \frac{3}{2} \frac{\rho}{m} \kappa T \right) + \frac{\partial}{\partial r_i} \left[ u_i \left( \frac{\rho u^2}{2} + \frac{3}{2} \frac{\rho}{m} \kappa T + p_{ид} \right) + \pi_{ij} u_j + S_i \right] = \frac{\rho}{m} \mathbf{F} \mathbf{u} + n \int \frac{p^2}{2m} I dp. \quad (7.14)$$

Уравнения (7.2), (7.9), (7.14) и являются искомыми уравнениями баланса плотности частиц, плотности импульса и плотности энергии. Обратим внимание на то, что под знаком производной по времени в уравнении (7.14) входит сумма плотности кинетической энергии  $\rho u^2/2$  и плотности внутренней энергии идеального газа. Естественно, что в неидеальном газе в уравнении баланса энергии под знаком производной по времени должна стоять наряду с плотностью кинетической энергии плотность внутренней энергии реального газа. Мы увидим, что соответствующий вклад под знаком  $\partial/\partial t$ , обусловленный взаимодействием частиц, возникает за счет последнего члена правой части уравнения (7.14). Из этого же члена будет следовать и соответствующий вклад взаимодействия частиц в поток энергии. Аналогичную роль играет второй член правой части уравнения (7.9). Он определяет вклад взаимодействия частиц в поток импульса. Все это будет показано в гл. 11. А пока мы видим, что уравнения баланса (7.2), (7.9), (7.14), которые составляют систему пяти уравнений, незамкнуты, так как кроме пяти функций  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $T$  в них входят еще функции

$$\pi_{ij}, \mathbf{S}, \int p I dp, \int \frac{p^2}{2m} I dp. \quad (7.15)$$

Незамкнутость уравнений баланса есть следствие незамкнутости самого исходного уравнения (6.2), которое является лишь первым уравнением цепочки уравнений для функций распределения. В следующей главе в приближении парных столкновений будет получено замкнутое уравнение для одночастичной функции распределения — кинетическое уравнение Больцмана для не-

идеального газа. В этом уравнении взаимодействие частиц будет играть двоякую роль. Оно будет определять члены, описывающие диссипативные процессы, и будет также вносить определенный вклад в недиссипативные характеристики газа, например внутреннюю энергию, давление, энтропию и т. д.

Если пренебречь вкладом взаимодействия частиц в недиссипативные характеристики газа, т. е. рассматривать уравнение Больцмана для идеального газа, то в этом приближении интеграл столкновений будет обладать свойствами

$$n \int p I dp = 0, \quad n \int \frac{p^2}{2m} I dp = 0. \quad (7.16)$$

Вследствие этого в уравнениях баланса останутся лишь две «лишние функции»  $\pi_{ij}$ ,  $\mathbf{S}$  (это восемь скалярных функций, так как  $\pi_{ij} = \pi_{ji}$  и сумма диагональных элементов тензора  $\pi_{ij}$  равна нулю). В приближении, когда характерный размер системы  $L$  много больше длины свободного пробега, с помощью уравнения Больцмана можно выразить эти функции через  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $T$  следующим образом:

$$\pi_{ij} = -\eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial r_k} \right), \quad (7.17)$$

$$\mathbf{S} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}}. \quad (7.18)$$

Здесь  $\eta$  — коэффициент вязкости, а  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности. Для этих коэффициентов получаются следующие выражения [2, 3, 5, 9, 12]:

$$\eta = \frac{5m}{16\sqrt{\pi} r_0^2} \sqrt{\frac{\kappa T}{m}}, \quad \kappa = \frac{75}{32} \frac{\kappa}{\sqrt{\pi} r_0^2} \sqrt{\frac{\kappa T}{m}}. \quad (7.19)$$

Если в уравнениях баланса (7.2), (7.9), (7.14) учесть равенства (7.16) и подставить в них выражения (7.17), (7.18), то получим замкнутую систему уравнений для функций  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $T$  — систему уравнений газовой динамики для идеального газа. Мы увидим в гл. 2, что из уравнения Больцмана для неидеального газа будут следовать более общие уравнения газовой динамики с учетом вклада взаимодействия частиц в термодинамические функции.

## КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ НЕИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

### § 8. Некоторые результаты статистической теории равновесного состояния неидеального газа

Приведем некоторые результаты статистической теории газов, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Используя каноническое распределение Гиббса

$$f_N(x, a, T) = \exp \frac{F - H(x, a)}{\kappa T}, \quad (8.1)$$

где  $a$  — внешние параметры,

$$F = -\kappa T \ln Z, \quad Z = \int \exp \left( -\frac{H(x, a)}{\kappa T} \right) dx$$

— свободная энергия, можно получить цепочку уравнений Боголюбова для равновесных функций распределения  $f_1(x_1)$ ,  $f_2(x_1, x_2)$ , ... При задании функции Гамильтона в виде (1.1) распределение по импульсам каждой частицы — распределение Максвелла, поэтому достаточно рассмотреть цепочку уравнений для функций распределения координат частиц  $f_1(r_1)$ ,  $f_2(r_1, r_2)$ , ... Первые два уравнения цепочки имеют вид [4, 5] (их можно получить из уравнений (1.19), (1.20))

$$\frac{\partial f_1}{\partial r_1} + \frac{1}{\kappa T} \frac{\partial u}{\partial r_1} = -\frac{n}{\kappa T} \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial r_1} f_2 dr_2, \quad (8.2)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{1}{\kappa T} \frac{\partial u}{\partial r_1} f_2 + \frac{1}{\kappa T} \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial r_1} f_2 = -\frac{n}{\kappa T} \int \frac{\partial \Phi_{13}}{\partial r_1} f_3 dr_3. \quad (8.3)$$

Здесь  $u$  — потенциал внешнего поля.

При  $u = 0$   $f_2 = f_2(|r_1 - r_2|)$  и из уравнения (8.2) следует, что

$$f_1(r_1) = 1, \quad \frac{1}{V} \int f_1 dr_1 = 1, \quad (8.4)$$



что указывает на пространственно однородное распределение частиц.

С учетом (8.4) связь функций распределения  $f_2, f_3$  с пространственными корреляционными функциями  $g_2, g_3$  определяется соотношениями

$$f_2 = 1 + g_2, \quad f_3 = 1 + g_2(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) + \\ + g_2(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|) + g_2(|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|) + g_3. \quad (8.5)$$

В приближении парных столкновений (в первом приближении по параметру плотности) для термодинамических функций в (8.5)  $g_3 = 0$ . Подставляя  $f_3$  из (8.5) в правую часть уравнения (8.3) при  $g_3 = 0$ , получим

$$\int \frac{\partial \Phi_{13}}{\partial \mathbf{r}_1} (1 + g_2(1, 3) + g_2(1, 2) + g_2(2, 3)) d\mathbf{r}_3 = 0. \quad (8.6)$$

Первые два члена в (8.6) обращаются в нуль вследствие изменения знака подынтегрального выражения при замене  $\mathbf{r}_{13} \rightarrow -\mathbf{r}_{13}$ . Следующие два члена дают вклад лишь при взаимодействии трех частиц, поэтому в рассматриваемом приближении их следует отбросить.

В результате уравнение для функции  $f_2$  принимает вид

$$\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{r}_1} + \frac{1}{\kappa T} \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} f_2 = 0. \quad (8.7)$$

Отсюда

$$f_2 = C \exp(-\Phi_{12}/\kappa T). \quad (8.8)$$

Постоянную  $C$  определяем из условия нормировки (1.14):

$$C = \left( \frac{1}{V^2} \int \exp\left(-\frac{\Phi_{12}}{\kappa T}\right) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \right)^{-1} = \\ = \left( 1 + \frac{4\pi}{V} \int_0^\infty \left( \exp\left(-\frac{\Phi}{\kappa T}\right) - 1 \right) r^2 dr \right)^{-1} = 1, \quad (8.9)$$

так как вклад второго члена порядка  $r_0^3/V$  и равен нулю при  $V \rightarrow \infty$ . Таким образом, из (8.8), (8.5) при  $C = 1$  находим функции  $f_2, g_2$  в приближении взаимодействия пар частиц:

$$f_2 = \exp(-\Phi_{12}/\kappa T), \quad g_2 = \exp(-\Phi_{12}/\kappa T) - 1. \quad (8.10)$$

Рассмотрим в этом приближении выражения для основных термодинамических функций. Для этого выразим внутреннюю энергию и давление через функции  $f_1, f_2$ .

Усредняя функцию Гамильтона (1.1) с помощью функции  $f_N$  и используя определения (1.12), (1.13) для функций  $f_1, f_2$ , найдем

выражение для плотности внутренней энергии

$$U \equiv \frac{\bar{H}}{V} = n \int \frac{p^2}{2m} f_1 d\mathbf{p} + \frac{n^2}{2} \int \Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) f_2(x, x') \frac{dx dx'}{V}. \quad (8.11)$$

Отсюда, используя для  $f_1$  распределение Максвелла и распределение (8.10), получим

$$U = n \frac{3}{2} \kappa T + 2\pi n^2 \int_0^\infty \Phi(r) \exp(-\Phi(r)/\kappa T) r^2 dr \equiv U_{\text{ид}} + \Delta U. \quad (8.12)$$

Через  $\Delta U$  обозначен вклад, определенный взаимодействием частиц.

Связь давления со второй функцией распределения следует из выражения

$$p = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = \kappa T \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_T \quad (8.13)$$

и имеет следующий вид [4, 5, 9]:

$$p = n\kappa T - \frac{2\pi n^2}{3} \int_0^\infty r \Phi'(r) f_2(r) r^2 dr \equiv p_{\text{ид}} + \Delta p. \quad (8.14)$$

Подставим сюда выражение (8.10) для  $f_2$  и проинтегрируем во втором члене по частям. В результате получим

$$\Delta p = - \kappa T \cdot 2\pi n^2 \int_0^\infty (e^{-\Phi/\kappa T} - 1) r^2 dr. \quad (8.15)$$

Из формул (8.13), (8.15) следует выражение для  $\Delta F$  — вклада в свободную энергию, определяемого взаимодействием

$$\frac{\Delta F}{V} = - \kappa T \cdot 2\pi n^2 \int_0^\infty (e^{-\Phi(r)/\kappa T} - 1) r^2 dr. \quad (8.16)$$

Приведем, наконец, выражение для соответствующего вклада взаимодействия в энтропию. Из выражений (8.12), (8.16) для  $\Delta U$ ,  $\Delta F/V$  находим

$$\Delta S = \kappa 2\pi n^2 \int_0^\infty \frac{\Phi}{\kappa T} e^{-\Phi/\kappa T} r^2 dr + \kappa 2\pi n^2 \int_0^\infty (e^{-\Phi/\kappa T} - 1) r^2 dr. \quad (8.17)$$

Приведенные выражения для термодинамических функций справедливы для произвольной модели одноатомного газа. Рассмотрим для примера модель шариков со слабым притяжением,

когда потенциал взаимодействия

$$\Phi(r) = \begin{cases} \infty & \text{при } r \leq r_0, \\ \Phi(r) < 0, \quad |\Phi(r)|/\kappa T \ll 1 & \text{при } r > r_0. \end{cases} \quad (8.18)$$

Подставим этот потенциал в формулы (8.12), (8.15), (8.17) и введем обозначения для постоянных Ван-дер-Ваальса  $b$  и  $a$ :

$$b = \frac{2\pi}{3} r_0^3, \quad a = 2\pi \int_{r_0}^{\infty} |\Phi(r)| r^2 dr. \quad (8.19)$$

Тогда выражения для  $\Delta U$ ,  $\Delta p$ ,  $\Delta S$  в первом приближении по  $|\Phi|/\kappa T$  можно записать в виде

$$\Delta U = -n^2 a, \quad \Delta p = n^2 \kappa T (b - a/\kappa T), \quad \Delta S = -\kappa n^2 b. \quad (8.20)$$

Из приведенных формул следует, что вклады, обусловленные взаимодействием частиц, в термодинамические функции  $\ll nr_0^3 = \epsilon$  по отношению к соответствующим величинам для идеального газа.

Рассмотрим выражение для относительных флуктуаций плотности числа частиц в элементе объема  $\Delta V \ll V$ , но содержащего в то же время много частиц. Для этого вернемся к формуле (5.6), определяющей связь функций  $(\overline{\delta N \delta N})_{x, x', t}$ ,  $g_2(x, x', t)$ . Проинтегрируем в ней во всех членах по импульсам  $p, p'$ . Учитывая, что  $\int \delta N(x, t) dp = \delta n(r, t)$ ,  $\int g_2(x, x') dp dp' = g_2(r, r')$  и  $(N/V) \int f_1 dp = n(r)$ , найдем связь между одновременной корреляцией флуктуаций  $\delta n(r)$  и пространственной корреляционной функцией  $g_2(r, r')$ :

$$\begin{aligned} \overline{(\delta n \delta n)}_{r, r'} &= \frac{N(N-1)}{V^2} g_2(r, r') + \\ &+ \left( \delta(r - r') n(r) - \frac{1}{N} n(r) n(r') \right). \end{aligned} \quad (8.21)$$

Обозначим через

$$N_{\Delta V} = \int_{\Delta V} n(r) dr \quad (8.22)$$

среднее число частиц в объеме  $\Delta V$ , а через  $\delta N_{\Delta V}$  соответствующую флуктуацию и проинтегрируем во всех членах (8.21) по  $r, r'$  по области  $\Delta V$ .

Используем выражения

$$\begin{aligned} \left(\frac{N}{V}\right)^2 \int_{\Delta V} g_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}' &= nN_{\Delta V} \int g_2(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \\ \int_{\Delta V} \left[ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n(\mathbf{r}) - \frac{1}{N} n(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r} d\mathbf{r}' &= \\ &= N_{\Delta V} \left( 1 - \frac{N_{\Delta V}}{N} \right) = N_{\Delta V}. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Из (8.21)—(8.23) находим следующее выражение для относительных квадратичных флуктуаций числа частиц в объеме  $\Delta V$ :

$$\frac{\overline{\delta^2 N_{\Delta V}}}{N_{\Delta V}^2} = \frac{1}{N_{\Delta V}} \left( 1 + n \int g_2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right). \quad (8.24)$$

Второй член в правой части этого выражения учитывает роль взаимодействия. Мы видим, что он определяется корреляционной функцией  $g_2$ .

Рассмотрим и здесь приближение взаимодействия пар атомов. В этом приближении из (8.10), (8.24) находим

$$\frac{\overline{\delta^2 N_{\Delta V}}}{N_{\Delta V}^2} = \frac{1}{N_{\Delta V}} \left( 1 + 4\pi n \int_0^{\infty} (e^{-\Phi/\kappa T} - 1) r^2 dr \right). \quad (8.25)$$

Для модели твердых шариков со слабым притяжением, когда потенциал  $\Phi(\mathbf{r})$  определяется выражением (8.18), находим, что

$$\frac{\overline{\delta^2 N_{\Delta V}}}{N_{\Delta V}^2} = \frac{1}{N_{\Delta V}} \left[ 1 + 2n \left( \frac{a}{\kappa T} - b \right) \right]. \quad (8.26)$$

Как и в выражении для давления, вклад взаимодействия в (8.26) определяется соотношением эффектов притяжения и отталкивания, характеризуемого константами Ван-дер-Ваальса  $a$  и  $b$ .

Приведенные выражения для термодинамических функций определяются нулевыми и первыми членами разложений по параметру плотности — так называемых вириальных разложений термодинамических функций. Аналогичные вириальные разложения существуют и для функций  $f_2$ ,  $g_2$ . Формулы (8.10) определяют первые члены таких разложений. На основе цепочки уравнений для функций распределения  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$ , ... можно найти функции  $f_2$ ,  $g_2$  в любом приближении по параметру плотности [4, 5]. Так, первые два члена в разложении функций  $f_2$ ,  $g_2$  по

плотности имеют вид

$$f_2 = e^{-\Phi_{12}/kT} \left( 1 + n \int (e^{-\Phi_{13}/kT} - 1) (e^{-\Phi_{23}/kT} - 1) dr_3 \right), \quad (8.27)$$

$$g_2 = f_2 - 1.$$

Используя это выражение, можно определить первые три члена вириальных разложений термодинамических функций.

Использование более высоких членов вириальных разложений мало эффективно, так как последующие члены разложений оказываются очень сложными и поэтому не удастся таким путем рассчитать термодинамические функции плотных газов.

Расчет термодинамических функций плотных газов и жидкостей проводится либо численными методами (метод молекулярной динамики, метод Монте-Карло), либо путем решения модельных нелинейных интегральных уравнений для двухчастичной корреляционной функции [33, 34].

## § 9. Нелинейные интегральные уравнения для двухчастичной корреляционной функции

В настоящее время предложено несколько типов нелинейных интегральных уравнений для корреляционной функции  $g_2(r)$ . Исторически первым было так называемое уравнение Кирквуда — Боголюбова — Борна — Грина. Оно может быть получено из второго уравнения цепочки уравнений Боголюбова (8.3), если в нем для функции  $f_3$  использовать суперпозиционное приближение Кирквуда. Для пространственно однородного распределения газа суперпозиционное приближение имеет вид

$$f_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = f_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) f_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) f_2(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1). \quad (9.1)$$

Исследование уравнения Кирквуда — Боголюбова — Борна — Грина, приведенное в ряде работ [36, 61], показало, что это уравнение дает во многом правильные качественные описания свойств плотных газов и простых жидкостей, но недостаточно для численных расчетов.

Перкус и Йевик предложили для описания свойств жидкостей иное интегральное уравнение, которое дает лучшее количественное описание простых жидкостей. Это уравнение впервые было получено на основе физических соображений о характере коллективных движений в жидкости. В более поздних работах (см. обзоры [33, 34]) были сделаны попытки более строгого обоснования уравнения Перкуса — Йевика.

Формально уравнение Перкуса — Йевика может быть получено из известного уравнения Орнштейна — Цернике [33, 34]:

$$g_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = c(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + n \int c(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) g_2(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2) dr_3, \quad (9.2)$$

которое служит фактически определением так называемой прямой корреляционной функции  $c(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  через двухчастичную функцию  $g_2$ . Чтобы получить уравнение Перкуса — Йевики из (9.2), надо использовать второе соотношение между функциями  $c, g_2$  в виде

$$c(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (1 + g_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2))(1 - e^{-\Phi_{12}/\kappa T}). \quad (9.3)$$

Из (9.2), (9.3) следует замкнутое уравнение для функции  $g_2$  (или для функции  $f_2 = 1 + g_2$ ). Запишем его в виде

$$f_2(1, 2) = e^{-\Phi_{12}/\kappa T} \left[ 1 + n \int e^{\Phi_{13}/\kappa T} f_2(1, 3) (e^{-\Phi_{13}/\kappa T} - 1) (f_2(2, 3) - 1) d\mathbf{r}_3 \right]. \quad (9.4)$$

Широко используется также так называемое приближение свёрхпереплетающихся цепей. Соответствующее уравнение для функции также может быть получено из уравнения Орнштейна — Цернике, если в нем вместо (9.3) использовать соотношение между функциями  $c, g_2$  в виде

$$c(1, 2) = f_2(1, 2) - 1 - \ln f_2(1, 2) - \Phi_{12}/\kappa T. \quad (9.5)$$

Оба соотношения (9.3), (9.5) удовлетворяют общим требованиям относительно асимптотического поведения функций  $f_2, c$  при  $r \rightarrow \infty$ .

В работе [35] предложен иной тип уравнения для  $f_2$ :

$$f_2(1, 2) = e^{-\Phi_{12}/\kappa T} \left( 1 + n \int (f_2(1, 3) - 1) (f_2(2, 3) - 1) d\mathbf{r}_3 \right). \quad (9.6)$$

Оно более симметрично, чем уравнение Перкуса — Йевики, но обладает другой асимптотикой на больших расстояниях.

Все предложенные интегральные уравнения точно учитывают первые два члена вириального разложения функции  $f_2$  и по-разному учитывают вклады высших приближений по параметру плотности.

## § 10. Кинетическое уравнение Больцмана для пространственно однородного идеального газа

В § 2 в приближении парных столкновений была получена замкнутая система уравнений для функций распределения  $f_1, f_2$  (2.11), (2.18). При пространственно однородном распределении газа она упрощается и принимает вид (см. (2.13), (2.20))

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{p}_1, t)}{\partial t} = n \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} g_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) d\mathbf{x}_2 \equiv I(\mathbf{p}_1, t), \quad (10.1)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} - \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} - \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) \times \\ \times f_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) = \frac{\partial}{\partial t} f_1(\mathbf{p}_1, t) f_1(\mathbf{p}_2, t). \quad (10.2)$$

Рассмотрим дополнительные предположения, при которых из этой системы можно получить замкнутое уравнение для одночастичной функции  $f_1$  — кинетическое уравнение Больцмана.

Решение уравнения (10.2) можно представить в виде суммы двух частей: решений однородного и неоднородного уравнений. Первая часть решения зависит от вида функции распределения  $f_2$  в начальный момент  $t_0$ . Так как  $f_2 = f_1 f_1 + g_2$ , то это решение тем самым зависит от начального вида корреляционной функции  $g_2$ .

Первое дополнительное упрощение при выводе кинетического уравнения Больцмана состоит в использовании введенного Боголюбовым условия полного ослабления начальной корреляции частиц.

Однако реально при выводе кинетического уравнения можно пренебречь лишь теми начальными корреляциями, времена корреляции которых  $\tau_{\text{кор}}$  много меньше времени релаксации функции распределения  $f_1$ , последнее по порядку величины совпадает со средним временем свободного пробега  $\tau_{\text{ст}} = l/v_T$ . Итак, можно пренебречь теми корреляциями, для которых

$$\tau_{\text{кор}} \ll \tau_{\text{ст}}. \quad (10.3)$$

Тем самым условие полного ослабления начальных корреляций соответствует предположению о том, что долгоживущие корреляции (с  $\tau_{\text{кор}} \gg \tau_{\text{ст}}$ ) не играют существенной роли в кинетической теории. В дальнейшем мы увидим, что это не всегда оправдано.

При использовании условия ослабления начальных корреляций решение однородного уравнения для функции  $f_2$  определяется лишь видом функций  $f_1(\mathbf{p}_1, t)$ ,  $f_1(\mathbf{p}_2, t)$  в начальный момент  $t_0 \equiv t - \tau$ , где  $\tau = t - t_0$ , т. е. функциями  $f_1(\mathbf{p}_1, t - \tau)$ ,  $f_1(\mathbf{p}_2, t - \tau)$ . Это показывает, что функция  $f_2$  в момент времени  $t$  определяется видом функций  $f_1$  в более ранний момент времени  $t - \tau$ , т. е. имеет место временное запаздывание.

Второе предположение при выводе уравнения Больцмана из системы уравнений (10.1), (10.2) заключается в полном пренебрежении временным запаздыванием. Иными словами, делается предположение, что функция распределения  $f_2$  в момент времени  $t$  определяется значениями функций распределения  $f_1$  в тот же момент времени  $t$ . В этом же приближении можно пренебречь правой частью уравнения (10.2), так как она пропорциональна производным по времени от функций  $f_1$ , и тем самым рассматривать лишь решение однородного уравнения (10.2).

При сделанных предположениях решение уравнения (10.2) имеет вид

$$f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) = f_1(\mathbf{P}_1(-\infty), t) f_1(\mathbf{P}_2(-\infty), t) \equiv \\ \equiv S_{-\infty}^{(2)} f_1(\mathbf{p}_1, t) f_1(\mathbf{p}_2, t). \quad (10.4)$$

Здесь  $\mathbf{P}_{1,2}(-\infty) \equiv \lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{1,2}(-\tau)$  — начальные импульсы частиц «1», «2», которые сталкиваются в момент времени  $t$ ,  $S_{-\tau}^{(2)}$  — оператор сдвига переменных «1», «2» по времени за интервал  $\tau$ . Предельный переход  $\tau \rightarrow \infty$  возможен в силу неравенства  $\tau_0 = r_0/v_\tau \ll \tau_{ст}$ .

Чтобы найти выражение для интеграла столкновений  $I$ , надо подставить выражение (10.4) для  $g_2 = f_2 - f_1 f_1$  в правую часть уравнения (10.1). В результате получим выражение для интеграла столкновений

$$I(\mathbf{p}_1, t) = n \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} f_1(\mathbf{P}_1(-\infty), t) f_1(\mathbf{P}_2(-\infty), t) d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2. \quad (10.5)$$

В такой форме он впервые был получен Боголюбовым.

Интеграл столкновений определяется одночастичными функциями  $f_1$ , поэтому уравнение (10.1) с правой частью (10.5) представляет собой замкнутое уравнение для функций  $f_1$ . Это уравнение и называется кинетическим уравнением Больцмана.

Впервые кинетическое уравнение Больцмана было получено иным способом, а именно путем подсчета средних чисел столкновений, приводящих к увеличению и уменьшению числа атомов с импульсами, лежащими в объеме  $d\mathbf{p}_1$  около значения  $\mathbf{p}_1$ . Сам интеграл столкновений записывался при этом в иной форме, чем (10.5). Она может быть получена путем преобразования выражения (10.5). Проделаем это.

Прежде всего преобразуем с помощью уравнения (10.2) исходное выражение для интеграла столкновений к другому виду. Для этого умножим уравнение (10.2) на  $n$  и проинтегрируем по  $\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2$ .

Рассмотрим суммарный вклад первого члена левой части и правой части уравнения (10.2):

$$n \frac{\partial}{\partial t} \int (f_2 - f_1 f_1) d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2 = N \frac{\partial}{\partial t} (f_1 - f_1) = 0. \quad (10.6)$$

Здесь использованы условие нормировки (1.14) для функции  $f_1$  и первое из равенств (2.7).

Далее заметим, что при интегрировании по  $\mathbf{p}_2$

$$n \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2 = 0, \quad (10.7)$$



поэтому вклад последнего члена левой части уравнения (10.2) равен нулю.

В результате из (10.2) получаем следующее равенство:

$$n \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{p}_1} d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2 = n \int (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{r}_1} d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2. \quad (10.8)$$

Заметим, что вследствие пространственно однородного распределения атомов газа в равенстве (10.8) можно  $f_2$  заменить на  $g_2$ . Тогда левая часть этого равенства совпадает с определением интеграла столкновений (10.1) и, следовательно,

$$I(\mathbf{p}_1, t) = n \int (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} g_2 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2. \quad (10.9)$$

Это и есть искомое иное определение интеграла столкновений.

Подставим в (10.9) выражение для корреляционной функции, которое следует из (10.4). В результате получим следующее выражение для интеграла столкновений:

$$I(\mathbf{p}_1, t) = n \int (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} f_1(\mathbf{P}_1(-\infty), t) f_1(\mathbf{P}_2(-\infty), t) d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2. \quad (10.10)$$

Напомним, что импульсы  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  — это начальные (в момент  $t - \tau$ ) импульсы двух взаимодействующих атомов, которые в момент  $t$  имеют импульсы  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ .

Выражая «начальные» импульсы через  $\mathbf{p}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{r}_2$ , можно записать

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1(-\infty) &= \mathbf{P}_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, -\infty), \\ \mathbf{P}_2(-\infty) &= \mathbf{P}_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, -\infty). \end{aligned} \quad (10.11)$$

Импульсы  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  зависят лишь от разности координат  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ , а не от самих  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ .

В «начальном» состоянии частицы настолько удалены друг от друга, что они не взаимодействуют, поэтому имеет место равенство

$$\frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m} + \Phi(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = \frac{\mathbf{P}_1^2}{2m} + \frac{\mathbf{P}_2^2}{2m}, \quad (10.12)$$

выражающее закон сохранения энергии.

В выражении (10.10) можно проинтегрировать по  $\mathbf{r}_2$ , при этом оно представится в виде разности двух членов

$$I = I_b - I_a. \quad (10.13)$$

Это показывает, что в приближении парных столкновений можно выделить два класса столкновений. Одни из них (столкновения типа  $a$ ) уменьшают число частиц с импульсом  $\mathbf{p}_1$  в точке  $\mathbf{r}_1$ ,

а другие (столкновения типа б) увеличивают число частиц с импульсом  $\mathbf{p}_1$  в точке  $\mathbf{r}_1$ . Схематически оба типа столкновений изображены на рис. 1.

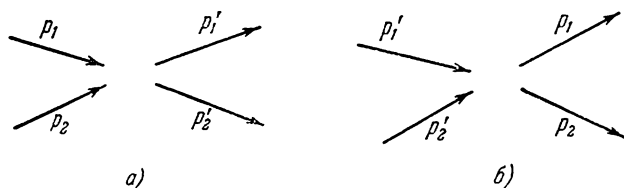


Рис. 1.

Вклад столкновений типа а описывается интегралом столкновений  $I_a$  в (10.13), а типа б — интегралом  $I_b$ .

В процессах типа а импульсы  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  являются «начальными» импульсами, а  $\mathbf{p}_1', \mathbf{p}_2'$  — «конечными» импульсами. Наоборот, в процессах типа б импульсы  $\mathbf{p}_1', \mathbf{p}_2'$  — начальные, а  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  — конечные. И в том и другом случаях импульсы  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1', \mathbf{p}_2'$  связаны законами сохранения импульса и кинетической энергии:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2', \quad \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} = \frac{p_1'^2}{2m} + \frac{p_2'^2}{2m}. \quad (10.14)$$

Вернемся к выражению (10.10). Произведем под интегралом переход от переменных  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  к цилиндрическим переменным  $z, \rho, \varphi$ . Ось цилиндрической системы координат направим вдоль вектора относительной скорости  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ . Выражение (10.10) тогда примет вид

$$I(\mathbf{p}_1, t) = \\ = n \int d\mathbf{p}_2 \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \frac{\partial}{\partial z} f_1(\mathbf{P}_1(-\infty), t) f_1(\mathbf{P}_2(-\infty), t).$$

Выполним в этом выражении интегрирование по  $z$ :

$$I(\mathbf{p}_1, t) = \\ = n \int d\mathbf{p}_2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| f_1(\mathbf{P}_1(-\infty), t) f_1(\mathbf{P}_2(-\infty), t) \Big|_{z=\pm\infty}. \quad (10.15)$$

Выясним смысл значений импульсов  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  при  $z = \pm \infty$ .

При  $z = -\infty$  вклад в  $I(\mathbf{p}_1, t)$  отрицателен, поэтому  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  — начальные импульсы столкновения типа  $a$ , т. е.

$$\begin{aligned} P_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, -\infty)|_{z=-\infty} &= \mathbf{p}_1, \\ P_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, -\infty)|_{z=-\infty} &= \mathbf{p}_2. \end{aligned} \quad (10.16)$$

При  $z = +\infty$  вклад в  $I(\mathbf{p}_1, t)$  положителен, поэтому  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  — начальные импульсы столкновения типа  $b$ , т. е.

$$P_{1,2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, +\infty)|_{z=+\infty} = \mathbf{p}'_{1,2}. \quad (10.17)$$

В результате выражение (10.15) для интеграла столкновений  $I$  принимает вид

$$\begin{aligned} I(\mathbf{p}_1, t) = n \int d\mathbf{p}_2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| [f_1(\mathbf{p}'_1, t) f_1(\mathbf{p}'_2, t) - \\ - f_1(\mathbf{p}_1, t) f_1(\mathbf{p}_2, t)]. \end{aligned} \quad (10.18)$$

Импульсы  $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  связаны законом сохранения (10.14).

Четырех скалярных уравнений (10.14) естественно недостаточно, чтобы однозначно выразить, например, импульсы  $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2$  через  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ , поэтому функции  $\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}'_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ ,  $\mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}'_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$  содержат два параметра, в качестве которых можно принять координаты  $\rho, \varphi$ .

Тогда в (10.18)

$$\mathbf{p}'_{1,2} = \mathbf{p}'_{1,2}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \rho, \varphi). \quad (10.19)$$

Определение этих функций производится на основе решения задачи динамики столкновения двух атомов.

Напомним, что величина

$$d\sigma = \rho d\rho d\varphi \quad (10.20)$$

есть дифференциальное эффективное сечение рассеяния атомов с прицельным расстоянием  $\rho$ .

Вместо переменных  $\rho, \varphi$  в функциях (10.19) можно взять углы рассеяния  $\chi, \varphi$ . Тогда из решения механической задачи надо найти зависимость прицельного расстояния  $\rho$  от угла рассеяния  $\chi$ , т. е. зависимость  $\rho = \rho(\chi)$ . При этом вместо (10.20) имеем

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin \chi} \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\Omega, \quad d\Omega = \sin \chi d\chi d\varphi. \quad (10.21)$$

Выражение (10.18) справедливо для любого потенциала взаимодействия атомов  $\Phi$ . Рассмотрим случай модели твердых

шариков, когда

$$\Phi(r) = \begin{cases} \infty & \text{при } r \leq r_0, \\ 0 & \text{при } r > r_0. \end{cases} \quad (10.22)$$

В качестве параметров в уравнениях (10.19) в этом случае удобно выбрать значения углов, определяющих ориентацию единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , который направлен вдоль линии центров сталкивающихся атомов в момент их столкновения от «2» к «1». При этом функции (10.19) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'_1 &= \mathbf{p}_1 - m(\mathbf{v}\mathbf{n}_0)\mathbf{n}_0, \\ \mathbf{p}'_2 &= \mathbf{p}_2 + m(\mathbf{v}\mathbf{n}_0)\mathbf{n}_0. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Здесь  $\mathbf{v} = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)/m$  — относительная скорость сталкивающихся частиц.

Легко проверить, что выражения (10.23) удовлетворяют законам сохранения (10.14).

Из (10.23) находим относительную скорость

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - 2(\mathbf{v}\mathbf{n}_0)\mathbf{n}_0. \quad (10.24)$$

Отсюда

$$(\mathbf{v}'\mathbf{n}_0) = -(\mathbf{v}\mathbf{n}_0), \quad [\mathbf{v}'\mathbf{n}_0] = [\mathbf{v}\mathbf{n}_0], \quad |\mathbf{v}'| = |\mathbf{v}|. \quad (10.25)$$

Таким образом, величина относительной скорости остается неизменной, а проекция ее на вектор  $\mathbf{n}_0$  при столкновении меняет знак.

Для удобства вычислений представим атом «2» в виде шарика с удвоенным радиусом, т. е. с радиусом  $r_0$ , а атом «1» в виде точки (рис. 2).

Так как  $(\mathbf{v}'\mathbf{n}_0) = -(\mathbf{v}\mathbf{n}_0)$  и  $|\mathbf{v}'| = |\mathbf{v}|$ , то углы между векторами  $-\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{n}_0$  и  $\mathbf{v}'$ ,  $\mathbf{n}_0$  равны. Обозначим их через  $\alpha$ . Угол рассеяния  $\chi = \pi - 2\alpha$ .

Прицельное расстояние  $\rho$  связано с  $\alpha$  равенством  $\rho = r_0 \sin \alpha$ , и, следовательно, в интеграле столкновений (10.18)

$$v\rho d\rho d\varphi = vr_0^2 \cos \alpha \sin \alpha d\alpha d\varphi = (\mathbf{v}\mathbf{n}_0) r_0^2 d\Omega. \quad (10.26)$$

Интегрирование по  $\alpha$  надо производить в пределах от 0 до  $\pi/2$ , что соответствует интегрированию по полусфере. Можно распространить интегрирование на всю сферу, но тогда вместо  $(\mathbf{v}\mathbf{n}_0)$  надо взять модуль  $|\mathbf{v}\mathbf{n}_0|$  и внести множитель  $1/2$ . В результате интеграл столкновений в газе из твердых шариков

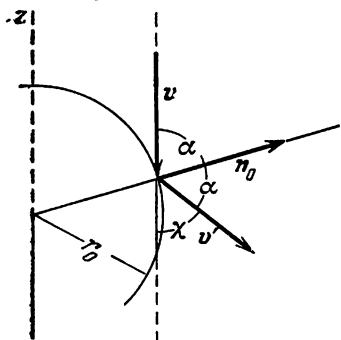


Рис. 2.

определяется выражением

$$I(\mathbf{p}_1, t) = \frac{nr_0^2}{2} \int d\mathbf{p}_2 \int d\Omega |\mathbf{v}\mathbf{n}_0| [f_1(\mathbf{p}'_1, t) f_1(\mathbf{p}'_2, t) - f_1(\mathbf{p}_1, t) f_1(\mathbf{p}_2, t)]. \quad (10.27)$$

В этом выражении импульсы  $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2$  связаны с  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  равенствами (10.23).

Итак, мы установили вид интеграла столкновений для произвольного потенциала  $\Phi$  (выражение (10.18)) и частное выражение для модели твердых шариков (выражение (10.27)). Напомним, что эти результаты получены при двух ограничениях: 1. Условие полного ослабления начальных корреляций. 2. Полное пренебрежение временным запаздыванием функций  $f_1$  при решении уравнения (10.2).

В следующем параграфе мы исследуем общие свойства интеграла столкновений Больцмана. Из них, в частности, будет следовать, что полученное кинетическое уравнение не учитывает вклад взаимодействия в термодинамические функции и в этом смысле является кинетическим уравнением лишь для идеального газа.

## § 11. Свойства интеграла столкновений Больцмана для идеального газа

Умножим интеграл столкновений (10.18) на произвольную функцию  $\varphi(\mathbf{p}_1)$  и проинтегрируем по  $\mathbf{p}_1$ . Введем обозначение

$$I(t) = n \int \varphi(\mathbf{p}_1) I(\mathbf{p}_1, t) d\mathbf{p}_1. \quad (11.1)$$

Подставим в (11.1) выражение (10.18) и произведем двойную симметризацию подынтегрального выражения: 1. Симметризуем по частицам «1», «2», т. е. во всех переменных «1»  $\rightleftharpoons$  «2». 2. Произведем симметризацию по импульсам до и после столкновения, т. е.  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rightleftharpoons \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2$ . Учитывая равенство

$$v\rho d\rho d\varphi d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 = v'\rho' d\rho' d\varphi' d\mathbf{p}'_1 d\mathbf{p}'_2 \quad (11.2)$$

(оно следует из решения уравнений движения двух сталкивающихся частиц и выражает эквивалентность с точки зрения механики процессов столкновений типа  $a$  и  $b$ ), запишем выражение для  $I(t)$  после двойной симметризации в виде

$$I(t) = \frac{n^2}{4} \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho [\varphi(\mathbf{p}_1) + \varphi(\mathbf{p}_2) - \varphi(\mathbf{p}'_1) - \varphi(\mathbf{p}'_2)] \times \\ \times [f_1(\mathbf{p}'_1, t) f_1(\mathbf{p}'_2, t) - f_1(\mathbf{p}_1, t) f_1(\mathbf{p}_2, t)]. \quad (11.3)$$

Отсюда следует, что интеграл  $I(t)$  обращается тождественно (при любых функциях  $f_1(\mathbf{p}, t)$ ) в нуль для всех функций  $\varphi$ , удовлетворяющих уравнению

$$\varphi(\mathbf{p}_1) + \varphi(\mathbf{p}_2) = \varphi(\mathbf{p}'_1) + \varphi(\mathbf{p}'_2). \quad (11.4)$$

Напомним, что  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2$  — импульсы до и после столкновения, поэтому уравнение (11.4) выполняется для функций  $\varphi$ , сохраняющихся в процессе столкновений, т. е. при  $\varphi(\mathbf{p}) = 1, \mathbf{p}, \mathbf{p}^2/2m$ .

Таким образом,

$$I(t) = n \int \varphi(\mathbf{p}) I(\mathbf{p}, t) d\mathbf{p} = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 1, \mathbf{p}, \mathbf{p}^2/2m. \quad (11.5)$$

Рассмотрим еще одно свойство интеграла столкновений. Выберем функцию  $\varphi(\mathbf{p})$  в виде

$$\varphi(\mathbf{p}) = -\kappa \ln f_1(\mathbf{p}, t)$$

и запишем выражение (11.3) в такой форме:

$$I(t) = -\frac{\kappa n^2}{4} \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho \ln \frac{f_1(\mathbf{p}_1, t) f_1(\mathbf{p}_2, t)}{f_1(\mathbf{p}'_1, t) f_1(\mathbf{p}'_2, t)} \times \\ \times [f_1(\mathbf{p}'_1, t) f_1(\mathbf{p}'_2, t) - f_1(\mathbf{p}_1, t) f_1(\mathbf{p}_2, t)]. \quad (11.6)$$

Отсюда следует, что

$$I(t) \geq 0 \quad \text{при} \quad \varphi(\mathbf{p}) = -\kappa \ln f_1(\mathbf{p}, t). \quad (11.7)$$

Знак равенства имеет место, когда функция  $f_1$  удовлетворяет уравнению

$$f_1(\mathbf{p}_1, t) f_1(\mathbf{p}_2, t) = f_1(\mathbf{p}'_1, t) f_1(\mathbf{p}'_2, t), \quad (11.8)$$

решением которого является распределение Максвелла

$$f_1(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi m k T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{p}^2}{2m k T}\right). \quad (11.9)$$

При условии (11.8) сам интеграл столкновений (11.6) обращается в нуль, а следовательно, уравнение (11.1) принимает вид

$$\partial f_1(\mathbf{p}_1, t) / \partial t = 0. \quad (11.10)$$

Таким образом, распределение Максвелла является равновесным решением уравнения Больцмана при пространственно однородном распределении частиц газа. При наличии внешнего поля равновесным решением уравнения Больцмана является распределение Максвелла — Больцмана.

Используем свойства (11.5). Рассмотрим уравнения баланса плотности числа частиц, плотности импульса и плотности энер-

гии (уравнения (7.2), (7.9), (7.14)). В них кроме пяти скалярных функций  $\rho$ ,  $u_i$ ,  $T$ , для которых составляются уравнения баланса, входят еще неизвестные функции (7.15). В силу свойств интеграла столкновений Больцмана (11.5)

$$\int p I d\mathbf{p} = 0, \quad \int \frac{p^2}{2m} I d\mathbf{p} = 0, \quad (11.11)$$

поэтому уравнения баланса (7.2), (7.9), (7.14) при  $F_0 = 0$  и пространственно однородном распределении атомов газа принимают вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{3}{2} \frac{\rho}{m} \kappa T = 0.$$

Отсюда следует, что величины

$$\rho, \quad \rho u_i, \quad \frac{3}{2} \frac{\rho}{m} \kappa T \equiv U_{\text{ид}} \quad (11.12)$$

при  $F_0 = 0$  и пространственно однородном распределении частиц газа не меняются со временем.

Величина  $U_{\text{ид}}$  — внутренняя энергия идеального газа. Это показывает, что в кинетическом уравнении Больцмана, полученном при двух указанных выше предположениях, взаимодействие частиц в недиссипативных характеристиках не учитывается. В этом смысле мы будем говорить, что уравнение Больцмана (10.1) с интегралом столкновений (10.18) является кинетическим уравнением для идеального газа.

Свойство интеграла столкновений (11.7) обеспечивает выполнение закона возрастания энтропии

$$S(t) = -\kappa n \int \ln f_1(\mathbf{p}, t) f_1(\mathbf{p}, t) d\mathbf{p}. \quad (11.13)$$

Действительно, из уравнения (10.1) с учетом свойства интеграла столкновений (11.7) и определения плотности энтропии (11.13) следует, что

$$dS/dt \geq 0 \quad \text{или} \quad dH/dt \leq 0, \quad H = -S \quad (11.14)$$

(H-теорема Больцмана). Знак равенства относится к случаю равновесного состояния.

В следующих параграфах мы будем использовать выражение (10.5) для интеграла столкновений, т. е. будем использовать интеграл столкновений в форме, предложенной Боголюбовым.

Проверим, что интеграл столкновений в форме (10.5) также обладает свойствами (11.5).

Выполнение первого равенства (11.5) очевидно. Проверим справедливость второго равенства (11.5). Для этого умножим

выражение (10.5) на  $n\mathbf{p}_1$  и проинтегрируем по  $\mathbf{p}_1$  по частям. В результате

$$\begin{aligned} n \int \mathbf{p}_1 I d\mathbf{p}_1 &= \\ &= -n^2 \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_{12}} f_1(\mathbf{P}_1(-\infty), t) f_1(\mathbf{P}_2(-\infty), t) d\mathbf{r}_{12} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2. \end{aligned} \quad (11.15)$$

Здесь  $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ .

В силу пространственной однородности подынтегральное выражение в (11.15) зависит только от  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  (см. (10.11)) и при замене  $\mathbf{p}_1 \leftrightarrow \mathbf{p}_2$ ,  $\mathbf{r}_{12} \rightarrow -\mathbf{r}_{12}$  меняет знак. Таким образом, выражение (11.15) также равно нулю.

Умножим, наконец, выражение (10.5) на  $n\mathbf{p}_1^2/2m$  и проинтегрируем по частям по  $\mathbf{p}_1$  и симметризуем по «1», «2». В результате получим

$$\begin{aligned} n \int \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} I d\mathbf{p}_1 &= \\ &= \frac{n^2}{2} \int (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_{12}} f_1(\mathbf{P}_1(-\infty), t) f_1(\mathbf{P}_2(-\infty), t) d\mathbf{r}_{12} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2. \end{aligned} \quad (11.16)$$

Добавим в этом выражении интегрирование по  $\tau$  и запишем его в виде

$$\begin{aligned} n \int \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} I d\mathbf{p}_1 &= \\ &= \frac{n^2}{2} \int_0^{\infty} d\tau \int \frac{dx_1 dx_2}{V} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_{12}} \frac{d}{d\tau} f_1(\mathbf{P}_1(-\tau), t) f_1(\mathbf{P}_2(-\tau), t). \end{aligned} \quad (11.17)$$

Произведем здесь замену переменных  $x_1, x_2 \rightarrow X_1(-\tau), X_2(-\tau)$ . По теореме Лиувилля для задачи двух тел  $dx_1 dx_2 = dX_1 dX_2$ , поэтому выражение (11.17) принимает вид

$$\begin{aligned} n \int \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} I d\mathbf{p}_1 &= \\ &= \frac{n^2}{2} \int_0^{\infty} d\tau \int \frac{dX_1 dX_2}{V} [(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_{12}}]_{\tau} \frac{d}{d\tau} f_1(\mathbf{P}_1(-\tau), t) f_1(\mathbf{P}_2(-\tau), t). \end{aligned} \quad (11.18)$$

Скобки  $[\ ]_{\tau}$  указывают, что стоящее в них выражение является функцией  $\tau$  и переменных интегрирования  $X_1(-\tau), X_2(-\tau)$ .



Используем уравнение для произвольной функции динамических переменных  $A(x)$ :

$$\frac{dA(x)}{dt} = [HA] \quad (11.19)$$

при  $A = f_1(\mathbf{P}_1(-\tau), t) f_1(\mathbf{P}_2(-\tau), t)$ ,  $t = -\tau$ . В результате получим

$$\frac{df_1(\mathbf{P}_1(-\tau)) f_1(\mathbf{P}_2(-\tau))}{d(-\tau)} =$$

$$= - \left[ \left( \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} + \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) f_1 f_1 \right]_{x_1(-\tau), x_2(-\tau)}. \quad (11.20)$$

Отсюда следует, что под интегралом в (11.18) выражение  $\frac{d}{d\tau} \dots$  не зависит явно от  $\tau$ , а зависит лишь от переменных интегрирования  $X_1(-\tau)$ ,  $X_2(-\tau)$ .

Заметим далее, что

$$\left[ (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_{12}} \right]_{\tau} = \frac{d}{d\tau} [\Phi_{12}]_{\tau}. \quad (11.21)$$

Подставим выражения (11.20), (11.21) в (11.18). Учтем, что при интегрировании по  $\tau$  останется лишь вклад от  $\tau = 0$ , но  $X_{1,2}(-\tau)|_{\tau=0} = x_{1,2}$ . В результате

$$\begin{aligned} n \int \frac{p_1^2}{2m} I d\mathbf{p}_1 = \\ = \frac{n^2}{2} \int \Phi_{12} \left( \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} + \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) f_1(\mathbf{p}_1, t) f_1(\mathbf{p}_2, t) \frac{dx_1 dx_2}{V} = 0. \end{aligned} \quad (11.22)$$

Таким образом, доказано третье равенство (11.5).

Проведенное здесь доказательство равенства (11.22) будет использовано в § 12 при рассмотрении законов сохранения на основе кинетического уравнения для неидеального газа.

## § 12. Кинетическое уравнение Больцмана для неидеального пространственно однородного газа

Вернемся к уравнению (10.2) и рассмотрим его решение лишь при одном предположении о полном ослаблении начальных корреляций и, следовательно, не будем пренебрегать временным запаздыванием в функциях  $f_1(\mathbf{p}_1, t)$ ,  $f_1(\mathbf{p}_2, t)$ . Вместо (10.4) получим тогда следующее решение:

$$\begin{aligned} f_2(x_1, x_2, t) = f_1(\mathbf{P}_1(-\tau), t - \tau) f_1(\mathbf{P}_2(-\tau), t - \tau) + \\ + \int_0^{\tau} \left[ \frac{\partial}{\partial t} f_1(\mathbf{p}_1, t) f_1(\mathbf{p}_2, t) \right]_{p_{1,2}(-\tau'), t-\tau'} d\tau'. \end{aligned} \quad (12.1)$$

В первом приближении по запаздыванию (в первом приближении по  $\tau_0$   $\partial/\partial t \sim \tau_0/\tau_{ст}$ ) находим отсюда

$$f_2(x_1, x_2, t) = \left(1 - \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) f_1(\mathbf{P}_1(-\tau), t) f_1(\mathbf{P}_2(-\tau), t) + \int_0^\tau \left[\frac{\partial}{\partial t} f_1 f_1\right]_{\mathbf{P}_{1,2}(-\tau'), t} d\tau'. \quad (12.2)$$

Во втором члене проинтегрируем по частям по  $\tau'$ . В результате выражение (12.2) примет вид

$$f_2(x_1, x_2, t) = f_1(\mathbf{P}_1(-\tau), t) f_1(\mathbf{P}_2(-\tau), t) - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\tau \tau' \frac{d}{d\tau'} f_1(\mathbf{P}_1(-\tau'), t) f_1(\mathbf{P}_2(-\tau'), t) d\tau'. \quad (12.3)$$

В этом выражении уже можно произвести предельный переход  $\tau \rightarrow \infty$ . В результате получаем решения уравнения (10.2) с учетом членов первого приближения по запаздыванию — первого приближения по  $\tau_0/\tau_{ст}$ :

$$f_2(x_1, x_2, t) = f_1(\mathbf{P}_1(-\infty), t) f_1(\mathbf{P}_2(-\infty), t) - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \tau \frac{d}{d\tau} f_1(\mathbf{P}_1(-\tau), t) f_1(\mathbf{P}_2(-\tau), t) d\tau. \quad (12.4)$$

Первый член в этом выражении совпадает с (10.4), а второй учитывает запаздывание.

Подставим выражение (12.4) для  $g_2 = f_2 - f_1 f_1$  в правую часть уравнения (10.1) и представим полученный таким образом интеграл столкновений в виде суммы двух частей:

$$I(\mathbf{p}_1, t) = I_{(1)}(\mathbf{p}_1, t) + I_{(2)}(\mathbf{p}_1, t). \quad (12.5)$$

Первый член в этом выражении  $I_{(1)}$  совпадает с (10.5), а второй определяется выражением

$$I_{(2)}(\mathbf{p}_1, t) = -n \frac{\partial}{\partial t} \iint \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \frac{d}{d\tau} f_1(\mathbf{P}_1(-\tau), t) f_1(\mathbf{P}_2(-\tau), t) \tau d\tau d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2. \quad (12.6)$$

Интеграл  $I_{(1)}$  обладает свойствами (11.5), т. е.

$$n \int \varphi(\mathbf{p}_1) I_{(1)}(\mathbf{p}_1, t) d\mathbf{p}_1 = 0 \quad \text{при } \varphi = 1, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1^2/2m. \quad (12.7)$$

Рассмотрим соответствующие выражения с интегралом  $I_{(2)}$ . Из выражения (12.6) непосредственно следует, что  $\int I_{(2)} d\mathbf{p}_1 = 0$ .

Умножим выражение (12.6) на  $n p_1$  и проинтегрируем по частям по  $p_1$ . В результате получим

$$n \int p_1 I_{(2)} d p_1 = \\ = n \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} d \tau \int d p_1 d p_2 d r_{12} \tau \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial r_{12}} \frac{d}{d \tau} f_1(\mathbf{P}_1(-\tau), t) f_1(\mathbf{P}_2(-\tau), t). \quad (12.8)$$

В силу пространственной однородности в (12.8), как ранее в (11.15), подынтегральное выражение зависит только от  $(r_1 - r_2)$  и при замене  $p_1 \rightleftharpoons p_2$ ,  $r_{12} \rightarrow -r_{12}$  меняет знак и, следовательно, выражение (12.8) равно нулю.

Таким образом,

$$n \int \varphi(p_1) I_{(2)}(p_1, t) d p_1 = 0 \quad \text{при } \varphi = 1, p_1. \quad (12.9)$$

Покажем, что в отличие от (11.5) при  $\varphi = p_1^2/2m$  равенство (12.9) не имеет места.

Умножим (12.6) на  $n p_1^2/2m$  и проинтегрируем по  $p_1$ . После интегрирования по частям по  $p_1$  и симметризации относительно «1», «2» получим

$$n \int \frac{p_1^2}{2m} I_{(2)} d p_1 = \frac{n}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} d \tau \int \frac{d x_1 d x_2}{V} (v_1 - v_2) \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial r_{12}} \times \\ \times \tau \frac{d}{d \tau} f_1(\mathbf{P}_1(-\tau), t) f_1(\mathbf{P}_2(-\tau), t). \quad (12.10)$$

Это выражение соответствует (11.17).

Как и в (11.17), произведем замену переменных  $x_1, x_2 \rightarrow X_1(-\tau), X_2(-\tau)$  и используем равенство (11.21). После этого получим

$$n \int \frac{p_1^2}{2m} I_{(2)} d p_1 = \frac{n^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} d \tau \int \frac{d X_1 d X_2}{V} \frac{d}{d \tau} [\Phi_{12}]_{\tau} \times \\ \times \tau \frac{d}{d \tau} f_1(\mathbf{P}_1(-\tau), t) f_1(\mathbf{P}_2(-\tau), t). \quad (12.11)$$

Произведем в (12.11) интегрирование по  $\tau$  по частям с учетом, что выражение (11.20) под знаком интеграла в (12.11) не зависит явно от  $\tau$ . Так как

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{d \tau} [\Phi_{12}]_{\tau} \tau d \tau = - \int_0^{\infty} [\Phi_{12}]_{\tau} d \tau, \quad (12.12)$$

то после обратного преобразования переменных  $X_{1,2}(-\tau) \rightarrow x_{1,2}$  получим из (12.11), (12.12)

$$\begin{aligned} n \int \frac{p_1^2}{2m} I_{(2)} d\mathbf{p}_1 &= \\ &= -\frac{n^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty d\tau \int \frac{dx_1 dx_2}{V} \Phi_{12} \frac{d}{d\tau} f_1(\mathbf{P}_1(-\tau), t) f_1(\mathbf{P}_2(-\tau), t). \end{aligned} \quad (12.13)$$

Здесь можно выполнить интегрирование по  $\tau$ . Учитывая при этом, что при пространственно однородном распределении выражение

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f_1(\mathbf{p}_1, t) f_1(\mathbf{p}_2, t) d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 = 0, \quad (12.14)$$

получим окончательный результат:

$$\begin{aligned} n \int \frac{p_1^2}{2m} I_{(2)}(\mathbf{p}_1, t) d\mathbf{p}_1 &= \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \frac{n^2}{2} \int \Phi_{12} f_1(\mathbf{P}_1(-\infty), t) f_1(\mathbf{P}_2(-\infty), t) \frac{dx_1 dx_2}{V}. \end{aligned} \quad (12.15)$$

Рассмотрим снова уравнения баланса энергии. Из уравнения (7.14) с учетом равенств (12.7) (при  $\varphi = p_1^2/2m$ ) и (12.15) получим теперь

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ n \int \frac{p_1^2}{2m} f_1 d\mathbf{p}_1 + \right. \\ \left. + \frac{n^2}{2} \int \Phi_{12} f_1(\mathbf{P}_1(-\infty), t) f_1(\mathbf{P}_2(-\infty), t) d\mathbf{r}_{12} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \right\} = 0. \end{aligned} \quad (12.16)$$

Таким образом, при учете эффекта запаздывания сохраняющейся величиной является сумма кинетической энергии и потенциальной энергии пар сталкивающихся частиц, и, следовательно, плотность внутренней энергии определяется теперь выражением

$$\begin{aligned} U &= n \int \frac{p_1^2}{2m} f_1 d\mathbf{p}_1 + \\ &+ \frac{n^2}{2} \int \Phi_{12} f_1(\mathbf{P}_1(-\infty), t) f_1(\mathbf{P}_2(-\infty), t) d\mathbf{r}_{12} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2. \end{aligned} \quad (12.17)$$

В равновесном состоянии функция

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{P}_1(-\infty)) f_1(\mathbf{P}_2(-\infty)) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi m \kappa T)^3} \exp \left[ -\frac{p_1^2/2m + p_2^2/2m + \Phi_{12}}{\kappa T} \right] \end{aligned} \quad (12.18)$$

Здесь использовано равенство (10.12).

Используя формулу (12.18), для плотности внутренней энергии находим выражение

$$U = \frac{3}{2} n \kappa T + \frac{n^2}{2} \int \Phi_{12} e^{-\Phi_{12}/\kappa T} d\mathbf{r}_{12}. \quad (12.19)$$

Это выражение совпадает с результатом равновесной теории (8.12), полученным в первом приближении по параметру плотности.

### § 13. Интеграл столкновений в приближении теории возмущений. Кинетическое уравнение Ландау

В приближении теории возмущений вместо уравнения (10.2) надо использовать более простое уравнение (3.4). Запишем его для случая  $F_0 = 0$  и пространственно однородного распределения частиц газа:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} \right) g_2 = \\ = \left( \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} + \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) f_1(\mathbf{p}_1, t) f_1(\mathbf{p}_2, t). \end{aligned} \quad (13.1)$$

При условии полного ослабления начальной корреляции остается лишь решение неоднородного уравнения (13.1). С учетом временного запаздывания функций  $f_1(\mathbf{p}_1, t)$ ,  $f_1(\mathbf{p}_2, t)$  это решение можно записать в виде

$$\begin{aligned} g_2(x_1, x_2, t) = \int_0^\infty \frac{\partial \Phi_{12}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\tau|)}{\partial \mathbf{r}_1} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) \times \\ \times f_1(\mathbf{p}_1, t - \tau) f_1(\mathbf{p}_2, t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Это выражение и определяет корреляционную функцию  $g_2$  в приближении теории возмущений.

В первом приближении по запаздыванию выражение (13.2) принимает вид

$$\begin{aligned} g_2(x_1, x_2, t) = \int_0^\infty \frac{\partial \Phi_{12}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\tau|)}{\partial \mathbf{r}_1} \left( 1 - \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \times \\ \times \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) f_1(\mathbf{p}_1, t) f_1(\mathbf{p}_2, t) d\tau. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Покажем, как это выражение получить непосредственно из решения (12.4). С помощью уравнений движения частиц «1», «2»

$$d\mathbf{p}_{1,2}/dt = -\partial \Phi_{12}/\partial \mathbf{r}_{1,2} \quad (13.4)$$

выразим  $p_1, p_2$  через  $P_1(-\tau), P_2(-\tau)$ :

$$p_{1,2} = P_{1,2}(-\tau) - \int_{t-\tau}^t \left[ \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial r_{1,2}} \right]_{t'} dt' = P_{1,2}(-\tau) - \int_0^\tau \left[ \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial r_{1,2}} \right]_{t-\tau'} d\tau'. \quad (13.5)$$

В приближении теории возмущений функции  $r_{1,2}(t-\tau)$  под интегралом достаточно вычислить в нулевом приближении по взаимодействию, т. е.

$$r_{1,2}(t-\tau) = r_{1,2}(t) - v_{1,2}\tau. \quad (13.6)$$

В результате из (13.5) находим

$$P_{1,2}(-\tau) = p_{1,2} + \int_0^\tau \frac{\partial \Phi(|r_1 - r_2 - (v_1 - v_2)\tau'|}{dr_{1,2}} d\tau'. \quad (13.7)$$

Подставим эти выражения в (12.4) и проведем разложение по взаимодействию. В результате получим выражение (13.3).

Найдем соответствующие результатам (13.2), (13.3) выражения для интеграла столкновений.

Из (13.2), (10.1) находим выражение для интеграла столкновений  $I(p_1, t)$  в приближении теории возмущений, но без предположения о малости запаздывания:

$$I(p_1, t) = n \int_0^\infty d\tau \int dx_2 \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial r_{1i}} \frac{\partial}{\partial p_{1i}} \times \\ \times \frac{\partial \Phi_{12}(|r_1 - r_2 - (v_1 - v_2)\tau|)}{\partial r_{1j}} \left( \frac{\partial}{\partial p_{1j}} - \frac{\partial}{\partial p_{2j}} \right) f_1(p_1, t-\tau) f_1(p_2, t-\tau). \quad (13.8)$$

Это выражение удобно представить в иной форме. Разложим  $\Phi(r)$  в интеграл Фурье по  $r$ :

$$\Phi(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \Phi(k) e^{ikr} dk, \quad (13.9)$$

и подставим это разложение в (13.8). В результате после интегрирования по  $r_2$  получим

$$I(p_1, t) = \frac{n}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial p_{1i}} \int_0^\infty d\tau \int dp_2 \int dk k_i k_j \Phi^2(k) \exp[-ik(v_1 - v_2)\tau] \times \\ \times \left( \frac{\partial}{\partial p_{1j}} - \frac{\partial}{\partial p_{2j}} \right) f_1(p_1, t-\tau) f_1(p_2, t-\tau). \quad (13.10)$$

В первом приближении по запаздыванию интеграл столкновений можно снова представить в виде суммы двух частей

$$I = I_{(1)} + I_{(2)}. \quad (13.11)$$

Из выражений (13.10), (13.11) находим

$$I_{(1)} = \frac{n}{8\pi^2} \frac{\partial}{\partial p_{1i}} \int k_i k_j \Phi^2(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}v_1 - \mathbf{k}v_2) \left( \frac{\partial}{\partial p_{1j}} - \frac{\partial}{\partial p_{2j}} \right) f_1(\mathbf{p}_1, t) \times \\ \times f_1(\mathbf{p}_2, t) d\mathbf{k} dp_2, \quad (13.12)$$

$$I_{(2)} = -\frac{n}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial p_{1i}} \int k_i k_j \Phi^2(\mathbf{k}) \left( \int_0^\infty \cos(\mathbf{k}v_1 - \mathbf{k}v_2) \tau \cdot \tau d\tau \right) \times \\ \times \left( \frac{\partial}{\partial p_{1j}} - \frac{\partial}{\partial p_{2j}} \right) f_1(\mathbf{p}_1, t) f_1(\mathbf{p}_2, t) d\mathbf{k} dp_2. \quad (13.13)$$

Выражение (13.12), определяющее интеграл столкновений без учета временного запаздывания в приближении теории возмущений, называется интегралом столкновений Ландау. Мы увидим, что это приближение имеет широкую область применимости для системы заряженных частиц, когда взаимодействие частиц происходит по закону Кулона.

Интегралы столкновений (13.12), (13.13) обладают теми же свойствами, что и рассмотренные выше интегралы столкновений в приближении парных столкновений.

Заметим, что до сих пор мы не выяснили, какую роль играют интегралы столкновений  $I_{(2)}$ , учитывающие временное запаздывание, в формулировке Н-теоремы Больцмана. Этот вопрос мы теперь и рассмотрим.

## § 14. Н-теорема Больцмана для неидеального газа

В § 8 были приведены результаты расчета термодинамических функций в нулевом и первом приближениях по параметру плотности. Нулевое приближение соответствует идеальному газу, а первое приближение учитывает вклад взаимодействия в термодинамические функции. В частности, были приведены результаты расчета энтропии  $S$ . Результат можно представить в виде

$$S = S_{\text{ид}} + \Delta S. \quad (14.1)$$

Здесь  $S_{\text{ид}}$  — плотность энтропии идеального газа,  $\Delta S$  — вклад в  $S$ , обусловленный взаимодействием частиц. В первом приближении по плотности он определяется выражением (8.17).

В § 11 при использовании кинетического уравнения Больцмана получено выражение для энтропии неравновесного состояния

$$S_B(t) = -kn \int \ln f_1(\mathbf{p}, t) \cdot f_1(\mathbf{p}, t) d\mathbf{p}. \quad (14.2)$$

В равновесном состоянии  $f_1$  — распределение Максвелла, и

из (14.2) следует, что  $S_B = S_{ид}$ . Это показывает, что выражение (14.2) не учитывает членов первого порядка по плотности, которые в состоянии равновесия совпадают с выражением (8.17) для  $\Delta S$ .

Это не означает, что выражение (14.2) вовсе не учитывает вклад взаимодействия. Действительно, как и любые термодинамические функции, функции распределения  $f_1, f_2, \dots$  могут быть представлены в виде рядов по плотности. В рамках приближения парных столкновений можно получить лишь два первых члена разложения, поэтому, например, функция  $f_1$  в этом приближении может быть представлена в виде

$$f_1 = f_1^0 + \epsilon f_1^1. \quad (14.3)$$

Здесь  $f_1^0$  — функция распределения идеального газа,  $f_1^1$  — вклад в функцию  $f_1$ , обусловленный взаимодействием частиц. Функция  $f_1^1$  определяется корреляционной функцией  $g_2$ . При учете лишь парных столкновений связь  $f_1$  с  $g_2$  очевидна:

$$f_1(\mathbf{p}_1, t) = C \left( f_1^0 + n \int g_2(x_1, x_2, t) \frac{d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2}{V} \right). \quad (14.4)$$

Постоянную  $C$  определяем из условия нормировки  $(1/V) \int f_1 d\mathbf{x}_1 = 1$ . В силу малости параметра плотности в выражении для  $C$  можно удержать лишь члены нулевого и первого порядка по  $n$ . Тогда

$$f_1(\mathbf{p}_1, t) = f_1^0(\mathbf{p}_1, t) + n \left\{ \int d\mathbf{p}_2 g_2 - \int d\mathbf{p}'_1 d\mathbf{p}_2 g_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}_2, t) \times \right. \\ \left. \times f_1^0(\mathbf{p}_1, t) \right\} \frac{d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2}{V}. \quad (14.5)$$

Для равновесного состояния второй член в (14.5), пропорциональный  $n$ , обращается в нуль и, следовательно,

$$f_1(\mathbf{p}_1) = f_1^0(\mathbf{p}_1). \quad (14.6)$$

Таким образом, для неравновесных состояний выражение (14.2) учитывает частично вклад взаимодействия, который описывается одночастичной функцией распределения. Однако, как мы видели, этот учет не является полным.

В настоящем параграфе мы установим выражение для энтропии, которое полностью учитывает в первом приближении по плотности вклад взаимодействия частиц. Мы также покажем, что это выражение в рамках модели парных столкновений определяет  $H$ -функцию Больцмана для неидеального газа [37].



Представим выражение для плотности энтропии  $S$  в виде

$$S = S_B + \Delta S, \quad (14.7)$$

где  $\Delta S$  — дополнительный вклад в  $S$ , обусловленный корреляциями, входящими через вторую функцию распределения  $f_2$ .

Для определения  $\Delta S$  поступим следующим образом. Запишем выражение для  $S_B$  в расчете на две частицы в виде

$$-2 \frac{\kappa}{2} \int \ln(f_1 f_1) \cdot f_1 f_1 \frac{dx_1 dx_2}{V^2} = -\kappa \int \ln(f_1 f_1) f_2 \frac{dx_1 dx_2}{V^2},$$

Здесь использованы условия нормировки (1.14) и равенства (2.8).

Энтропия пар взаимодействующих частиц в расчете на одну пару равна

$$-\kappa \int \ln f_2 \cdot f_2 \frac{dx_1 dx_2}{V^2}.$$

Так как число пар равно  $N(N-1)/2$ , то из этих двух выражений следует выражение для части плотности энтропии, обусловленной корреляцией частиц [36, 37]:

$$\Delta S = -\kappa \frac{n^2}{2} \int \ln \frac{f_2}{f_1 f_1} \cdot f_2 \frac{dx_1 dx_2}{V}. \quad (14.8)$$

Рассмотрим это выражение для равновесного состояния. В этом случае в (14.8) можно выполнить интегрирование по импульсам. В результате получим

$$\Delta S = -\frac{\kappa n^2}{2} \int \ln f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \cdot f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \frac{d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2}{V}. \quad (14.9)$$

Здесь

$$f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = C \exp(-\Phi_{12}/\kappa T). \quad (14.10)$$

Нормировочная постоянная

$$C = \left( \int \exp\left(-\frac{\Phi_{12}}{\kappa T}\right) \frac{d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2}{V^2} \right)^{-1} \sim 1 - \frac{r_{\text{кор}}}{V}, \quad (14.11)$$

где  $r_{\text{кор}}$  — радиус корреляции.

При  $V \rightarrow \infty$   $C \rightarrow 1$ . Однако в выражении (14.9) можно положить  $C = 1$  лишь во втором сомножителе под интегралом. Действительно, с учетом (14.11) величина

$$\begin{aligned} -\frac{\kappa n^2}{2} \int \ln C \cdot f_2 \frac{d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2}{V} &= -\frac{\kappa n}{2} N \ln C = \\ &= \frac{1}{2} \kappa n^2 \int (e^{-\Phi_{12}/\kappa T} - 1) \frac{d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2}{V}, \end{aligned}$$

т. е. имеет тот же порядок, что и остальные члены в (14.9).

С учетом этого выражение (14.9) можно записать в виде

$$\Delta S = \frac{\kappa n^2}{2} \int \left[ \frac{\Phi}{\kappa T} e^{-\Phi/\kappa T} + (e^{-\Phi/\kappa T} - 1) \right] dr \quad (r = r_1 - r_2). \quad (14.12)$$

Это выражение совпадает с (8.17). Первая часть в (14.12) определяется внутренней энергией, а вторая — свободной энергией.

Для модели шариков со слабым притяжением

$$\Delta S = -\kappa n^2 b - \pi \kappa n^2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{\Phi^2(r)}{(\kappa T)^2} r^2 dr.$$

Здесь  $b = \frac{2}{3}\pi r_0^3$  — постоянная Ван-дер-Ваальса.

Общее выражение (14.8) в неравновесном случае можно также представить в виде суммы двух частей, одна из которых при переходе к равновесному состоянию будет определять вклад внутренней, а вторая — свободной энергий.

Для этого представим функции  $f_1, f_2$  в виде

$$f_1 = \left( \int F_1 \frac{dx_1}{V} \right)^{-1} F_1, \quad f_2 = \left( \int F_2 \frac{dx_1 dx_2}{V^2} \right)^{-1} F_2, \quad F_2 = F_1 F_1 + G_2. \quad (14.13)$$

В равновесном состоянии функции

$$F_2 = \exp(-\Phi/\kappa T), \quad G_2 = \exp(-\Phi/\kappa T) - 1. \quad (14.14)$$

Выражения (14.14) отличаются от (14.10) тем, что здесь  $C = 1$ , т. е. вклад корреляции не включается в нормировочную постоянную.

Учитывая, что  $\int F_1 \frac{dx_1}{V} = 1 + O(n)$ , и пренебрегая членами  $n^3$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\kappa n^2}{2} \int \ln \frac{\int F_2 \frac{dx_1 dx_2}{V^2}}{\int F_1 \frac{dx_1}{V} \int F_1 \frac{dx_2}{V}} \cdot f_2 \frac{dx_1 dx_2}{V} = \\ = \frac{\kappa n N}{2} \ln \left( 1 + \frac{\int G_2 \frac{dx_1 dx_2}{V^2}}{\int F_1 \frac{dx_1}{V} \int F_1 \frac{dx_2}{V}} \right) = \frac{\kappa n^2}{2} \int G_2 \frac{dx_1 dx_2}{V}. \end{aligned}$$

В результате выражение (14.8) принимает вид [37]

$$\Delta S = -\frac{\kappa n^2}{2} \int \left[ \ln \frac{F_2}{F_1 F_1} F_2 - G_2 \right] \frac{dx_1 dx_2}{V}. \quad (14.15)$$

В равновесном состоянии, используя (14.14), снова приходим к выражению (14.12). Мы видим, что первый член (14.15) является неравновесным аналогом вклада внутренней энергии, а второй — неравновесным аналогом вклада свободной энергии.

Рассмотрим теперь выражение для Н-функции неидеального газа [37].

Из формул (14.8), (14.15) видно, что в выражение для  $\Delta S$  корреляция входит через  $f_2$  и через  $\ln f_2$ . Чтобы учесть вклад корреляционной функции под знаком логарифма при определении Н-функции, поступим следующим образом.

Используя кинетическое уравнение, запишем уравнение для функции  $f_1(\mathbf{p}_1, t) f_1(\mathbf{p}_2, t)$ . Умножим это уравнение на

$$\left(-\frac{\kappa n}{2} \ln(f_1 f_1) - \frac{\kappa n^2}{2} V \ln \frac{f_2}{f_1 f_1}\right) \frac{dx_1 dx_2}{V^2}$$

и проинтегрируем по  $x_1 x_2$ . Пренебрегая в правой части членами порядка  $n^3$ , получим

$$\begin{aligned} -\kappa n \int \ln f_1 \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{dx_1}{V} - \frac{\kappa n^2}{2} \int \ln \frac{f_2}{f_1 f_1} \frac{\partial}{\partial t} f_1 f_1 \frac{dx_1 dx_2}{V} = \\ = -\kappa n \int \ln f_1 \cdot I_{(1)} \frac{dx_1}{V} - \kappa n \int \ln f_1 \cdot I_{(2)} \frac{dx_1}{V} \equiv I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (14.16)$$

Интеграл  $I_{(1)}$  совпадает с интегралом столкновений Больцмана, поэтому

$$I_1 = -\kappa n \int \ln f_1 I_{(1)} \frac{dx_1}{V} \geq 0. \quad (14.17)$$

Преобразуем второй член правой части (14.16). Используя выражение (12.6), после интегрирования по частям по  $\mathbf{p}_1$  и симметризации, получаем выражение

$$\begin{aligned} I_2 = -\frac{\kappa n^2}{2} \iint_0^\infty \left( \frac{\partial \Phi(1, 2)}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} + \frac{\partial \Phi(1, 2)}{\partial \mathbf{r}_2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) \ln(f_1 f_1) \times \\ \times \tau \frac{d}{d\tau} \frac{\partial}{\partial t} S_{-\tau}(1, 2) f_1(\mathbf{p}_1, t) f_1(\mathbf{p}_2, t) \frac{dx_1 dx_2}{V} d\tau. \end{aligned}$$

Проведем преобразования, аналогичные сделанным в §§ 11, 12 при выводе закона сохранения энергии. Перейдем под интегралом в  $I_2$  к новым переменным  $x_{1, 2} \rightarrow X_{1, 2}(-\tau)$  и учтем, что

$$\begin{aligned} -\left[ \left( \frac{\partial \Phi(1, 2)}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} + \frac{\partial \Phi(1, 2)}{\partial \mathbf{r}_2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) \ln(f_1 f_1) \right]_{X_{1, 2}(-\tau)} = \\ = \frac{d}{d(-\tau)} [\ln(f_1 f_1)]_{X_{1, 2}(-\tau)}. \end{aligned}$$

Проинтегрируем по частям по  $\tau$  и снова вернемся к переменным  $x_1, x_2$ . В результате получим выражение

$$I_2 = -\frac{\kappa n^2}{2} \int_0^\infty \int \ln(f_1 f_1) \frac{\partial}{\partial t} \frac{d}{d\tau} S_{-\tau}(1, 2) f_1(p_1, t) f_1(p_2, t) \frac{dx_1 dx_2}{V} d\tau.$$

Интегрируем по  $\tau$  и учитываем, что в нулевом приближении по запаздыванию вторая корреляционная функция

$$g_2(x_1, x_2) = f_1(P_1(-\infty), t) f_1(P_2(-\infty), t) - f_1(p_1, t) f_1(p_2, t),$$

получим выражение

$$I_2(t) = -\frac{\kappa n^2}{2} \int \ln(f_1 f_1) \frac{\partial g_2}{\partial t} \frac{dx_1 dx_2}{V}. \quad (14.18)$$

Используем уравнение (10.2) для функции  $f_2$ , чтобы записать выражение (14.18) в более удобной для нашей цели форме.

Умножим уравнение (10.2) на  $\ln f_2$  и проинтегрируем по  $x_1, x_2$ . В результате получим равенство

$$\int \ln f_2 \cdot \frac{\partial g_2}{\partial t} \frac{dx_1 dx_2}{V} = 0. \quad (14.19)$$

Из формул (14.18), (14.19) следует, что

$$I_2(t) = \frac{\kappa n^2}{2} \int \ln \frac{f_2}{f_1 f_1} \frac{\partial g_2}{\partial t} \frac{dx_1 dx_2}{V}. \quad (14.20)$$

В результате из (14.16), (14.17), (14.20) следует неравенство

$$-\kappa n \int \ln f_1 \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{dx_1}{V} - \frac{\kappa n^2}{2} \int \ln \frac{f_2}{f_1 f_1} \frac{\partial f_2}{\partial t} \frac{dx_1 dx_2}{V} = I_1(t) \geq 0. \quad (14.21)$$

В левой части оператор  $\partial/\partial t$  можно вывести из-под знаков интегралов, если учесть, что

$$\begin{aligned} \int f_1 \frac{\partial \ln f_1}{\partial t} \frac{dx_1}{V} &= 0, \\ \int f_2 \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{f_2}{f_1 f_1} \frac{dx_1 dx_2}{V} &= - \int \frac{\partial g_2}{\partial t} \frac{dx_1 dx_2}{V} = 0. \end{aligned} \quad (14.22)$$

Последнее равенство следует из уравнения (10.2). В результате получаем неравенство

$$dS/dt = -\partial H/\partial t = I_1(t) \geq 0, \quad (14.23)$$

где

$$H = -S = \kappa n \int f_1 \ln f_1 \frac{dx_1}{V} + \frac{\kappa n^2}{2} \int \ln \frac{f_2}{f_1 f_1} f_2 \frac{dx_1 dx_2}{V} \quad (14.24)$$

есть  $H$ -функция Больцмана при полном учете взаимодействия частиц в рамках приближения парных столкновений. Добавочный член в (14.24) для  $S$  совпадает с выражением (14.8).

Если вместо  $f_1, f_2, g_2$  использовать функции  $F_1, F_2, G_2$ , определяемые формулами (14.13), (14.14), то для  $H$ -функции вместо (14.24) получаем следующее выражение:

$$H = \kappa n \int f_1 \ln f_1 \frac{dx_1}{V} + \frac{\kappa n^2}{2} \int \left( \ln \frac{F_2}{F_1 F_1} \cdot F_2 - G_2 \right) \frac{dx_1 dx_2}{V}.$$

Это выражение соответствует выражению (14.15) для  $\Delta S$ .

В §§ 10—14 были рассмотрены кинетические уравнения для случая пространственно однородного распределения атомов газа. В следующем параграфе мы рассмотрим кинетическое уравнение для пространственно неоднородного неидеального газа и из этого уравнения получим уравнение газовой динамики для неидеального газа.

### § 15. Кинетическое уравнение Больцмана для пространственно неоднородного неидеального газа

Для получения кинетического уравнения для пространственно неоднородного газа в приближении парных столкновений используем систему уравнений (2.11), (2.18) для функций  $f_1, f_2$ .

При условии полного ослабления начальных корреляций решение уравнения (2.18) можно записать в виде

$$f_2(x_1, x_2, t) = f_1(X_1(-\tau), t - \tau) f_1(X_2(-\tau), t - \tau) + \int_0^\tau \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial r_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial r_2} \right) f_1(x_1, t) f_1(x_2, t) \right]_{X_{1,2}(-\tau'), t-\tau'} d\tau'. \quad (15.1)$$

Здесь  $X_1(-\tau), X_2(-\tau)$  — значения координат и импульсов частиц в момент времени  $t - \tau$ . В (15.1) положено  $F = 0$ . Для одноатомного газа это ограничение не является существенным при выводе интеграла столкновений, так как работа силы  $F$  на расстоянии порядка  $r_0$  пренебрежимо мала по сравнению с  $\kappa T$ .

Если подставить решение (15.1) в интеграл столкновений (2.11), то получим выражение для интеграла столкновений с учетом пространственного изменения функций  $f_1(x_1, t), f_1(x_2, t)$  в пределах радиуса действия межатомных сил и с учетом временного запаздывания функций  $f_1$ .

Рассмотрим частные случаи.

1. Функция распределения пространственно однородна и временное запаздывание не учитывается. В этом случае приходим

к кинетическому уравнению Больцмана для идеального газа (§§ 10, 11).

2. Пространственное распределение атомов газа однородно, но учитывается временное запаздывание. В этом приближении получаем кинетическое уравнение Больцмана для пространственно однородного неидеального газа (§§ 12—14).

3. Пренебрегаем временным запаздыванием, но учитываем пространственную неоднородность функций  $f_1$  на расстояниях порядка  $r_0$ . В этом приближении получаем обобщенное уравнение Больцмана, полученное Боголюбовым (уравнение (9.17) работы [4]). Для модели твердых шариков оно совпадает с обобщением уравнения Больцмана, предложенным Энскогом ([2], гл. 16).

Различие между этими уравнениями и уравнениями Больцмана проявляется, в частности, при переходе к гидродинамическому приближению. Используя обобщенное кинетическое уравнение, можно в гидродинамических уравнениях получить поправки к уравнению состояния идеального газа и соответствующие поправки к кинетическим коэффициентам в виде рядов по степеням параметра плотности.

Следует, однако, при этом иметь в виду то, что обобщения, проведенные в работах Энскога и Боголюбова, сделаны в рамках парных столкновений. Вследствие этого поправки к кинетическим коэффициентам и вклады взаимодействия в уравнение состояния второго и высших порядков по плотности не являются точными, так как неучтенные тройные и более сложные взаимодействия дают вклады того же порядка.

Вследствие этого при учете пространственной неоднородности в кинетическом уравнении, полученном в приближении парных столкновений, достаточно учесть лишь члены первого порядка по  $r_0/l$ , т. е. члены первого порядка по плотности.

Обобщенные уравнения Больцмана, рассмотренные в работах Энскога и Боголюбова, не учитывают временного запаздывания, поэтому при переходе к уравнениям газовой динамики они не дают поправок, обусловленных взаимодействием, к функциям под знаком  $\partial/\partial t$ . Вследствие этого, например, не учитывается вклад взаимодействия во внутреннюю энергию. Для учета всех поправок первого порядка по плотности в кинетическом уравнении надо учесть как пространственную неоднородность, так и временное запаздывание, т. е. учесть члены первого порядка по  $r_0/l$ ,  $\tau_0/\tau_{ст}$ .

4. В дополнение к тому, что было сделано в §§ 12, 13, надо учесть члены первого порядка по пространственной неоднородности. Сделаем это следующим образом.

Введем в  $f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t)$  переменные  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{12}$ ,  $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{12}/2$  и произведем разложение по  $\mathbf{r}_{12}\partial/\partial\mathbf{r}_1$ .

В первом приближении получим

$$\begin{aligned} f_2(x_1, x_2, t) &\equiv f_2\left(\mathbf{r}_{12}, \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t\right) = \\ &= \left(1 - \frac{r_{12}}{2} \frac{\partial}{\partial r_1}\right) f_2(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t). \end{aligned} \quad (15.2)$$

Запишем уравнение для функции

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) &\equiv \\ &\equiv g_2(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) + f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_2, t). \end{aligned}$$

Из уравнения (2.18) в первом приближении по неоднородности находим

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_{12}} - \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) \right] \times \\ \times f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_{12}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \right) \times \\ \times f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_2, t). \end{aligned} \quad (15.3)$$

При условии полного ослабления начальных корреляций решение этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_{12}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) &= f_1\left(\mathbf{r}_1 - \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{2} \tau, \mathbf{P}_1(-\tau), t - \tau\right) \times \\ &\times f_1\left(\mathbf{r}_1 - \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{2} \tau, \mathbf{P}_2(-\tau), t - \tau\right) + \\ &+ \int_0^\tau \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \right) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_1(-\tau'), t) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_2(-\tau'), t) d\tau'. \end{aligned}$$

Во втором члене сразу оставлены лишь члены первого порядка по запаздыванию и неоднородности. В первом члене произведем разложение по  $\tau$  и удержим члены нулевого и первого порядка. Во втором члене проинтегрируем по частям и произведем предельный переход  $\tau \rightarrow \infty$ . В результате получим выражение

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_{12}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) &= f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_1(-\infty), t) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_2(-\infty), t) - \\ &- \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \right) \int_0^\infty \tau \frac{d}{d\tau} f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_1(-\tau), t) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_2(-\tau), t) d\tau. \end{aligned} \quad (15.4)$$

При подстановке этого выражения в (15.2) удержим лишь члены первого порядка по  $r_0/l$ ,  $\tau_0/\tau_{ст}$ . В этом приближении оператор  $(-\mathbf{r}_{12}/2) \partial/\partial \mathbf{r}_1$  действует лишь на первый член в (15.4). В результате выражение для функции  $f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t)$  будет состоять из суммы трех членов. В соответствии с этим и

интеграл столкновений (2.12) можно представить в виде суммы трех частей:

$$I(x_1, t) = I_{(1)} + I_{(2)} + I_{(3)}. \quad (15.5)$$

Здесь первый член определяется выражением

$$I_1(x_1, t) = n \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_1(-\infty), t) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_2(-\infty), t) dx_2. \quad (15.6)$$

Оно отличается от выражения (10.5) зависимостью функций  $f_{1\mathbb{B}}$  от  $\mathbf{r}_1$ . Второй член в (15.5) определяется выражением

$$I_{(2)}(x_1, t) = -n \iint_0^\infty \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \right) \times \\ \times \tau \frac{d}{d\tau} f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_1(-\tau), t) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_2(-\tau), t) d\tau dx. \quad (15.7)$$

В случае пространственно однородного распределения частиц это выражение совпадает с выражением (12.6). Наконец, последний член в сумме (15.5) определяется выражением

$$I_{(3)}(x_1, t) = -\frac{n}{2} \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \left( \mathbf{r}_{12} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \right) [f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_1(-\infty), t) \times \\ \times f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_2(-\infty), t) - f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_2, t)] dx_2. \quad (15.8)$$

Появление второго члена в [] в правой части выражения (15.8) обусловлено тем, что интеграл столкновений определяется не функцией  $f_2$ , а корреляционной функцией  $g_2$ . Соответствующий вклад есть, естественно, и в левой части уравнения (2.11) в члене со средней силой (см. (2.10)). Эти вклады сокращаются. При этом  $\mathbf{F}$  в (2.11) заменяется на  $\mathbf{F}_0$ .

Используем кинетическое уравнение Больцмана с интегралом столкновений (15.5)–(15.8) для вывода уравнений газовой динамики неидеального газа. Для этого рассмотрим вклад интегралов столкновений  $I_{(1)}$ ,  $I_{(2)}$ ,  $I_{(3)}$  в уравнения переноса плотности числа частиц, плотности импульса и плотности энергии. Для этого согласно (7.15) надо рассмотреть интегралы  $\int \varphi I d\mathbf{p}$  при  $\varphi = 1$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p}^2/2m$ . Интеграл  $I_{(1)}$  и при пространственно неоднородном распределении частиц обладает свойствами (11.5), т. е.

$$n \int \varphi(\mathbf{p}_1) I_{(1)}(x_1, t) d\mathbf{p}_1 = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 1, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1^2/2m. \quad (15.9)$$

Вследствие этого интеграл  $I_{(1)}$  не дает непосредственного вклада в уравнение переноса. Но он определяет тензор вязких напряжений  $\pi_{ij}$  и вектор теплового потока [5, 9].



Интеграл  $I_{(2)}$ , как и при пространственно однородном распределении частиц, обладает свойствами

$$n \int \varphi(\mathbf{p}_1) I_{(2)} d\mathbf{p}_1 = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 1, \mathbf{p}_1 \quad (15.10)$$

и, следовательно, не дает вклада в уравнение переноса плотности числа частиц и плотности импульса.

В уравнение переноса плотности числа частиц не дает вклада и интеграл  $I_{(3)}$ , но

$$n \int \varphi(\mathbf{p}_1) I_{(3)} d\mathbf{p}_1 = 0 \quad \text{лишь при} \quad \varphi = 1. \quad (15.11)$$

При  $\varphi = \mathbf{p}_1$  этот интеграл не равен нулю и, следовательно, не равен нулю вклад от него в закон сохранения импульса. Определим этот вклад.

Умножим выражение (15.8) на  $n\mathbf{p}_1$  и проинтегрируем по  $\mathbf{p}_1$  \*). Проведем интегрирование по частям по  $\mathbf{p}_1$ . В результате получим выражение

$$n \int \mathbf{p}_{1i} I_{(3)} d\mathbf{p}_1 = - \frac{\partial \Delta P_{ij}}{\partial r_{1j}}. \quad (15.12)$$

Здесь введено обозначение  $\Delta P_{ij}$  для добавки к тензору  $P_{ij}$ , обусловленной взаимодействием. Тензор  $\Delta P_{ij}$  определяется выражением

$$\Delta P_{ij} = - \frac{n^2}{2} \int \frac{r_i r_l}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_1(-\infty), t) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_2(-\infty), t) d\mathbf{r} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2. \quad (15.13)$$

Здесь учтено, что  $\frac{\partial \Phi}{\partial r_i} = \frac{r_l}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ .

В соответствии с определением тензора вязких напряжений  $\pi_{ij} = P_{ij} - \delta_{ij}p$  представим тензор  $\Delta P_{ij}$  в виде

$$\Delta P_{ij} = \delta_{ij} \Delta p + \Delta \pi_{ij}. \quad (15.14)$$

Из выражений (15.14), (15.13) следует, что вклад взаимодействия в величину давления определяется выражением

$$\Delta p = - \frac{n^2}{6} \int r \Phi'(r) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_1(-\infty), t) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_2(-\infty), t) d\mathbf{r} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2. \quad (15.15)$$

\*) Второй член в квадратных скобках в (15.8) опускаем и заменяем  $\mathbf{F}$  на  $\mathbf{F}_0$  (см. стр. 74).

В принятом приближении выражения (15.13), (15.15) для  $\Delta P_{ij}$ ,  $\Delta p$  достаточно рассчитать в приближении локального равновесия, так как учет отклонений от локального распределения Максвелла дает вклады порядка  $\epsilon \epsilon_r$ , где  $\epsilon_r$  — гидродинамический малый параметр.

В приближении локального равновесия из (15.13) следует

$$\Delta P_{ij} = \delta_{ij} \Delta p, \quad \Delta \pi_{ij} = 0, \quad (15.16)$$

где

$$\Delta p = -\frac{n^2}{6} \int r \Phi'(r) f_1^{(0)}(\mathbf{P}_1(-\infty)) f_1^{(0)}(\mathbf{P}_2(-\infty)) dr dp_1 dp_2. \quad (15.17)$$

Подставим в (15.17) распределения Максвелла и используем равенство (10.12). Выполняя интегрирование по импульсам, получим

$$\begin{aligned} \Delta p &= -\frac{2\pi n^2}{3} \int_0^\infty r \Phi'(r) e^{-\Phi/\kappa T} r^2 dr = \\ &= \frac{2\pi n^2}{3} \kappa T \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r} (e^{-\Phi/\kappa T} - 1) r^3 dr. \end{aligned} \quad (15.18)$$

Интегрируя по частям по  $r$ , получим окончательно

$$\Delta p = -2\pi n^2 \kappa T \int_0^\infty (e^{-\Phi/\kappa T} - 1) r^2 dr. \quad (15.19)$$

Это выражение отличается от выражения (8.15), полученного для равновесного состояния лишь тем, что в (15.19) концентрация и температура — локальные характеристики и зависят поэтому от координаты и времени.

Для модели атомов в виде упругих шариков со слабым притяжением (см. (8.18)) из (15.19) находим, что

$$\Delta p = n^2 \kappa T \left( b - \frac{a}{\kappa T} \right), \quad (15.20)$$

где  $a$ ,  $b$  — постоянные Ван-дер-Ваальса (см. (8.19)). Выражение (15.20), как и (15.19), носит локальный характер.

Рассмотрим теперь вклад интегралов столкновений  $I_{(2)}$ ,  $I_{(3)}$  в уравнение баланса энергии.

Умножим выражение (15.7) на  $n \mathbf{p}_1^2 / 2m$  и проинтегрируем по  $\mathbf{p}_1$ . После преобразований, аналогичных проведенным в § 12 при выводе уравнения баланса внутренней энергии газа для случая пространственно однородного распределения частиц,

получим следующее выражение:

$$n \int \frac{p_1^2}{2m} I_{(2)} d\mathbf{p}_1 = -\frac{n^2}{2} \int \Phi_{12} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \right) \times \\ \times f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_1(-\infty), t) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_2(-\infty), t) d\mathbf{r} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2. \quad (15.21)$$

При пространственно однородном распределении частиц газа это выражение совпадает с выражением (12.15).

В приближении локального равновесия равенство (15.21) принимает вид

$$n \int \frac{p_1^2}{2m} I_{(2)} d\mathbf{p}_1 = - \left( \frac{\partial \Delta U}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u} \Delta U}{\partial \mathbf{r}_1} \right), \quad (15.22)$$

где

$$\Delta U = 2\pi n^2 \int_0^\infty \Phi e^{-\Phi/\kappa T} r^2 dr \quad (15.23)$$

— вклад в плотность внутренней энергии, обусловленный корреляцией частиц,  $\mathbf{u}$  — локальная средняя скорость.

Для потенциала взаимодействия (8.18) выражение (15.23) принимает вид

$$\Delta U = -n^2 a, \quad (15.24)$$

где  $a$  — постоянная Ван-дер-Ваальса.

Рассмотрим теперь вклад от  $I_{(3)}$  в уравнение баланса энергии.

Умножим выражение (15.8) на  $np_1^2/2m$  и проинтегрируем по  $\mathbf{p}_1$ . После интегрирования по частям по  $\mathbf{p}_1$  и симметризации по «1», «2» получим

$$n \int \frac{p_1^2}{2m} I_{(3)} d\mathbf{p}_1 = \frac{n^2}{4} \frac{\partial}{\partial r_j} \int (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)_i \frac{r_i r_j}{r} \Phi'(r) \times \\ \times f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_1(-\infty), t) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_2(-\infty), t) d\mathbf{r} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2. \quad (15.25)$$

В приближении локального распределения Максвелла находим отсюда окончательное выражение

$$n \int \frac{p_1^2}{2m} I_{(3)} d\mathbf{p}_1 = - \frac{\partial \mathbf{u} \Delta p}{\partial \mathbf{r}}. \quad (15.26)$$

Здесь  $\mathbf{u}$  — средняя скорость, величина  $\Delta p$  определяется выражением (15.19).

Мы произвели вычисление моментов интеграла столкновений, входящих в уравнения переноса, и теперь можем выписать в

окончательном виде полученную нами систему газодинамических уравнений для неидеального газа в рассматриваемом приближении парных столкновений. Из (7.2), (7.9), (7.14), (15.12), (15.22), (15.26) находим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0, \quad (15.27)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_j} [\rho u_i u_j + \delta_{ij} p + \pi_{ij}] = \frac{\rho}{m} F_{0i}, \quad (15.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u^2}{2} + U \right) + \frac{\partial}{\partial r_i} \left[ u_i \left( \frac{\rho u^2}{2} + U + p \right) + \pi_{ij} u_j + S_i \right] = \frac{\rho}{m} \mathbf{F}_0 \mathbf{u}. \quad (15.29)$$

Здесь

$$p = p_{\text{ид}} + \Delta p, \quad U = U_{\text{ид}} + \Delta U \quad (15.30)$$

— давление и плотность внутренней энергии неидеального газа. В приближении парных столкновений вклады  $\Delta p$ ,  $\Delta U$  в (15.30), обусловленные взаимодействием, определяются формулами (15.18) (или (15.19)) и (15.23).

Тензор вязких напряжений  $\pi_{ij}$  и вектор теплового потока в рассматриваемом приближении определяются выражениями (7.17), (7.18).

Естественно, что вместо системы уравнений для функций  $\rho$ ,  $\rho \mathbf{u}$ ,  $\rho u^2/2 + U$  можно записать систему уравнений для функций  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $T$ , так как давление  $p$  и внутренняя энергия могут быть выражены через  $\rho$  и  $T$ .

Для вывода уравнений газовой динамики здесь использовано кинетическое уравнение

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{F}_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \right) f_1 = I_{(1)} + I_{(2)} + I_{(3)}, \quad (15.31)$$

в котором в интеграле столкновений учтены эффекты временного запаздывания и пространственной неоднородности. Если эти эффекты не учитывать, т. е. положить  $I_{(2)} = I_{(3)} = 0$ , то в уравнениях газовой динамики (15.27) — (15.29)  $\Delta p = 0$ ,  $\Delta U = 0$  и, следовательно,  $p = p_{\text{ид}}$ ,  $U = U_{\text{ид}}$ . Таким образом, на основе обычного кинетического уравнения Больцмана с интегралом столкновений  $I = I_1$  можно получить уравнения газовой динамики лишь для идеального газа.

При выводе уравнений газовой динамики были удержаны только линейные члены по параметру плотности  $\epsilon = nr_0^3$  и газодинамическому параметру  $\epsilon_r = l/L$  ( $L$  — характерная длина рассматриваемой системы). Вопрос о высших приближениях будет рассмотрен в следующей главе. Здесь же лишь заметим, что ре-

шение кинетического уравнения в виде ряда по газодинамическому параметру является эффективным, когда распределение по скоростям близко к локальному распределению Максвелла. При сильном отклонении от состояния равновесия распределение по скоростям может столь сильно отличаться от распределения Максвелла, что экспоненциальный спад на «крыльях» распределения сменяется степенным [65]. В таких случаях описание процесса с помощью газодинамических уравнений может оказаться менее эффективным.

**КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ  
ДЛЯ ПЛОТНЫХ ГАЗОВ****§ 16. Проблемы кинетической теории плотных газов**

Интеграл столкновений в кинетическом уравнении Больцмана для идеального одноатомного газа (10.5) определяется выражением (10.4) для двухчастичной функции распределения. Напомним предположения, при которых получено это выражение для интеграла столкновений.

1. Пренебрежение тройными и более сложными столкновениями атомов. При этом условии из цепочки уравнений Боголюбова получается замкнутая система уравнений (2.11), (2.18) для функций распределения  $f_1$ ,  $f_2$ .

2. При решении уравнения (2.18) для функции распределения  $f_2$  использовано условие полного ослабления начальных корреляций — условие Боголюбова.

3. При решении уравнения для функции  $f_2$  не учитывалось временное запаздывание и пространственная неоднородность одночастичной функции распределения  $f_1$ . Отказ от этого предположения (§§ 12—15) позволяет в рамках приближения парных столкновений получить кинетическое и газодинамические уравнения для неидеального газа.

4. Использовано (неявно) предположение о непрерывности процесса столкновений любой из частиц в физически бесконечно малом объеме с окружающими частицами. Это предположение будет снято в гл. 4.

Наличие малого параметра  $\epsilon$  — параметра плотности позволяет, казалось бы, для получения кинетических уравнений с учетом тройных и более сложных столкновений искать решение для функции  $f_2$  в виде ряда по параметру плотности  $\epsilon$ .

В работе Боголюбова [4] развит метод, позволяющий, при выполнении условия полного ослабления начальных корреляций любого числа взаимодействующих частиц, определить вид функ-

ции распределения  $f_2$  в любом приближении по параметру плотности  $\epsilon$ .

Выражение (10.4) представляет собой нулевое приближение по  $\epsilon$ . Следующий член разложения (первое приближение по плотности) содержит вклады двух типов. Один определяет влияние тройных столкновений на диссипативные характеристики газа. Второй вклад иной природы. Он включает члены, определяющие влияние парных столкновений на недиссипативные характеристики газа, т. е., например, поправки к термодинамическим функциям, обусловленные взаимодействием пар частиц. Это эквивалентно учету в термодинамических функциях членов первого порядка по  $\tau_0/\tau_{ст}$ ,  $r_0/l$ .

Используя выражение для функции  $f_2$ , учитывающее члены, линейные по плотности, можно, естественно, получить и более точное выражение для интеграла столкновений в кинетическом уравнении. Это сделано Чо и Уленбеком (см. [5]).

Если учесть в выражении для  $f_2$  члены следующего приближения по плотности, то можно получить еще более общее кинетическое уравнение для газа. В нем дополнительно учитывается вклад четверных столкновений в диссипативные и тройных — в недиссипативные характеристики газа.

Таким образом, казалось бы, имеется метод построения кинетических уравнений для газа в любом приближении по плотности. В каждом приближении по плотности используются лишь допущения о полном ослаблении начальной корреляции на временах, много меньших  $\tau_{ст}$ , и непрерывности процесса столкновений. Однако при осуществлении этой программы возникают принципиальные трудности.

Исследования, проведенные независимо рядом авторов: Вайнштоком [19], Голдманом и Фрименом [20] и Дорфманом и Коэном [21] (см. обзор Коэна [22]), показали, что вклады в интегралы столкновений от высших приближений по плотности содержат расходящиеся (по времени) интегралы.

Интересно, что характер расходимостей в двумерной и трехмерной моделях газа оказывается различным.

В двумерной модели уже первая поправка по плотности (учет тройных столкновений) приводит в соответствующем интеграле столкновений к логарифмической ( $\ln t/\tau_0$ ) расходимости. Члены порядка  $\epsilon^n$  ( $n \geq 2$ ) приводят к расходимости вида  $(t/\tau_0)^{n-1}$ .

В трехмерном случае в первом приближении по  $\epsilon$  (тройные столкновения) расходимости нет. Расходимость (как  $\ln t/\tau_0$ ) возникает при учете четверных столкновений. Члены порядка  $\epsilon^n$  в  $f_2$  ( $n \geq 3$ ) приводят к расходимости вида  $(t/\tau_0)^{n-2}$ .

Это показывает, что построение кинетических уравнений для плотных газов путем непосредственного использования метода

последовательных приближений по степеням плотности оказывается невозможным. Имеется несколько работ (см. обзор [22]), в которых на частных примерах показано, что устранение логарифмической расходимости может быть проведено путем учета вклада наиболее расходящихся диаграмм, возникающих при использовании разложения по плотности. Это приводит к обрезанию области интегрирования по  $t$  при  $t - \tau_{ст}$ . В результате интеграл столкновений оказывается пропорциональным величине  $\ln(\tau_{ст}/\tau_0) \sim \ln(1/\epsilon)$ , которая неаналитически зависит от плотности. Вследствие этого оказывается невозможным вириальное (по степеням плотности) разложение кинетических коэффициентов.

Задача построения кинетических уравнений для плотных газов может быть решена иным путем без проведения суммирования расходящихся диаграмм в разложениях по плотности, но для этого надо отказаться от условия полного ослабления начальных корреляций на временах, много меньших  $\tau_{ст}$  (§ 18).

Уже сравнительно давно было обращено внимание на то, что условие полного ослабления начальных корреляций является приближенным (см., например, работы Сандри и Хопфилда, Бастина [64]). Ослабляется влияние лишь мелкомасштабных флуктуаций, для которых в приближении парных столкновений длина корреляции  $l_{кор}$  и время корреляции  $\tau_{кор}$  таковы, что

$$r_{кор} \ll l, \quad \tau_{кор} \ll \tau_{ст}. \quad (16.1)$$

В общем случае имеет место лишь частичное ослабление корреляций. Крупномасштабные флуктуации не затухают достаточно быстро и должны, следовательно, учитываться при построении кинетической теории. Их роль проявляется, в частности, в том, что функция распределения  $f_1$ , для которой записывается кинетическое уравнение, не является строго детерминированной (см. § 19).

Условную границу, разделяющую области быстрых и медленных флуктуаций, можно ввести следующим образом [23, 24].

Рассмотрим приближение парных столкновений. Обозначим через  $l_\phi^3$ ,  $\tau_\phi$  объем и временной интервал, которые для уравнения Больцмана можно рассматривать как физически бесконечно малые. При этом  $\tau_\phi = l_\phi/v_r$ .

Величину  $l_\phi$  определим из условия непрерывности процесса парных столкновений: интервал между последовательными столкновениями любой из частиц в физически бесконечно малом объеме равен  $\tau_\phi$ , т. е.

$$\frac{\tau_{ст}}{n l_\phi^3} = \tau_\phi = \frac{l_\phi}{v_r}. \quad (16.2)$$



Отсюда

$$l_{\phi} = \sqrt{\varepsilon} l, \quad \tau_{\phi} = \sqrt{\varepsilon} \tau_{\text{ст}}, \quad l_{\phi}^3 n \sim 1 / \sqrt{\varepsilon} \gg 1. \quad (16.3)$$

Будем называть мелкомасштабными такие флуктуации, для которых  $\tau_{\text{кор}} \leq \tau_{\phi}$ ,  $r_{\text{кор}} \leq l_{\phi}$ . Из (16.3) следует, что они затухают за время порядка  $\sqrt{\varepsilon} \tau_{\text{ст}} \ll \tau_{\text{ст}}$ .

Проведем соответствующие рассуждения для столкновений трех и четырех частиц. Обозначим соответствующие времена релаксации через  $\tau_{\text{ст}}^{(3)}$ ,  $\tau_{\text{ст}}^{(4)}$ . Они связаны с  $\tau_{\text{ст}}$ :  $\tau_{\text{ст}}^{(3)} = \tau_{\text{ст}} / \varepsilon$ ,  $\tau_{\text{ст}}^{(4)} = \tau_{\text{ст}} / \varepsilon^2$ . Подставим вместо  $\tau_{\text{ст}}$  в (16.2) величины  $\tau_{\text{ст}}^{(3)}$ ,  $\tau_{\text{ст}}^{(4)}$ .

В результате получим  $\tau_{\phi}^{(3)} \sim \sqrt{\varepsilon} \tau_{\text{ст}} \ll \tau_{\text{ст}}$ ,  $l_{\phi}^{(3)} \sim \sqrt{\varepsilon} l \ll l$ . Но  $\tau_{\phi}^{(4)} \sim \tau_{\text{ст}}$ ,  $l_{\phi}^{(4)} \sim l$ , поэтому при учете четверных столкновений мелкомасштабными являются корреляции, для которых  $\tau_{\text{кор}} \leq \tau_{\text{ст}}$ ,  $r_{\text{кор}} \leq l$ . Отсюда следует, что корректное построение интеграла четверных столкновений невозможно без учета корреляций с  $\tau_{\text{кор}} \sim \tau_{\text{ст}}$ ,  $l_{\text{кор}} \sim l$  и, следовательно, интеграл столкновений будет зависеть от  $\tau_{\text{ст}}$  (или  $l$ ). Из-за этого появляется дополнительная зависимость от плотности.

Заметим, что для двумерного случая уже для тройных столкновений (в 16.2)  $\tau_{\text{ст}} / n l_{\phi}^2 = \tau_{\phi} = l_{\phi} / v_{\text{T}} \tau_{\phi} \sim \tau_{\text{ст}}$ ,  $l_{\phi} \sim l$ . Следовательно, в этом случае интеграл тройных столкновений нельзя построить без учета корреляций с  $\tau_{\text{кор}} \sim \tau_{\text{ст}}$ ,  $l_{\text{кор}} \sim l$ . Это поясняет, почему разложение по плотности в двумерном случае нарушается раньше, чем в трехмерном.

Таким образом, положение границы, разделяющей области быстрых и медленных флуктуаций, зависит от рассматриваемого приближения.

Из изложенного следует, что при построении кинетического уравнения для плотных газов на временах  $\tau \ll \tau_{\text{ст}}$  происходит лишь частичное ослабление корреляций, которые существенны при построении кинетического уравнения.

При использовании условия частичного ослабления парных корреляций из уравнения Лиувилля не следует кинетическое уравнение Больцмана. Упрощение исходного уравнения Лиувилля состоит лишь в том, что вместо уравнения для точной функции распределения  $f_N$  получается приближенное уравнение для сглаженной на интервалах  $\tau_{\phi}$ ,  $l_{\phi}$  функции распределения  $\tilde{f}_N$  (см. § 18).

Из уравнения для функции  $\tilde{f}_N$  снова следует цепочка уравнений, но теперь уже для сглаженных функций распределения  $\tilde{f}_1 \equiv \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3, \dots$ . Эта цепочка уравнений отличается от цепочки уравнений В—В—G—K—Y тем, что в ней уже учтена диссипация, обусловленная парными столкновениями, и все функции являются медленно меняющимися.

В § 18 показано, как можно использовать эту цепочку уравнений при построении кинетического уравнения для плотных газов.

При выводе кинетических уравнений для газа в различных приближениях предполагается, что крупномасштабные флуктуации ( $c \tau_{\text{кор}} \geq \tau_{\text{ф}}$ ,  $l_{\text{кор}} \geq l_{\text{ф}}$ ) не играют роли. Однако крупномасштабные флуктуации естественно существуют. Они приводят к тому, что функции распределения, для которых записываются кинетические уравнения, на самом деле не являются строго детерминированными (§ 19).

Исследование крупномасштабных флуктуаций в последние годы приобрело значительный интерес в связи с исследованием шумов в различных приборах.

При исследовании крупномасштабных флуктуаций в газах используются два подхода.

В первом исходными служат кинетические уравнения, которые рассматриваются как уравнения Ланжевена со случайными источниками. Такой подход для газов развит в работах Кадомцева [25], Горькова, Дзялошинского, Питаевского [38], Когана, Шульмана [39].

Второй подход основан на приближенном решении цепочки уравнений для функций распределения  $f_1, f_2, f_3, \dots$  или соответствующих уравнений для функций Грина [40—45]. В § 19 будет произведен расчет крупномасштабных флуктуаций в газе на основе цепочки уравнений для сглаженных функций распределения  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3, \dots$ , в которой с самого начала учтена диссипация, обусловленная парными столкновениями [23, 24].

В настоящее время довольно широко обсуждается иной метод получения обобщенных кинетических уравнений. Он основан, с одной стороны, на работах Пригожина, Балеску, Ресибуа, Хенин, Жоржа, Валленборна [46—49] и, с другой стороны, на работах Зубарева, Пететминского и Цуканова, Калашникова, Новикова [50—52]. В этих работах авторы стремятся сразу получить наиболее общие кинетические уравнения, учитывающие произвольные взаимодействия частиц.

В § 20 будет рассмотрено такого рода обобщенное кинетическое уравнение с учетом как диссипативных, так и недиссипативных членов. При этом будет использован метод, примененный в § 12 при выводе уравнения Больцмана для неидеального газа. Обобщенное кинетическое уравнение значительно проще уравнения Лиувилля, так как является уравнением для первой функции распределения. Однако оно все же столь сложное, что его практическое применение требует дальнейших значительных упрощений. Тем не менее такого рода подход может оказаться весьма плодотворным.

### § 17. Кинетическое уравнение для неидеального газа с учетом тройных столкновений

В предыдущем параграфе мы уже говорили, что в работе Боголюбова [4] получено разложение двухчастичной функции распределения  $f_2$  для газа по степеням плотности. В частности, в случае пространственно однородного распределения газа первые два члена разложения функции  $f_2$  по плотности, полученного Боголюбовым, могут быть записаны в виде [4,5]

$$f_2(x_1, x_2, t) = S_{-\infty}^{(2)}(x_1, x_2) f_1 f_1 + \\ + n \int_0^{\infty} d\tau \int dx_3 S_{-\tau}^{(2)}(1, 2) \{ (\hat{\theta}_{13} + \hat{\theta}_{23}) S_{-\infty}^{(3)}(1, 2, 3) - \\ - S_{-\infty}^{(2)}(1, 2) (\hat{\theta}_{13} S_{-\infty}^{(2)}(1, 3) + \hat{\theta}_{23} S_{-\infty}^{(2)}(2, 3)) f_1 f_1 f_1 \}. \quad (17.1)$$

Здесь  $S_{-\tau}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  — оператор смещения координат и импульсов частиц  $x_1, \dots, x_n$ . Оператор  $\hat{\theta}_{ij}$  определяется выражением (1.6). Нормировка функции  $f_1, f_2$  определяется выражениями (1.14).

Для определения соответствующего интеграла столкновений надо подставить выражение (17.1) в (10.1). При этом первый член разложения (17.1) дает вклад, который определяет в приближении парных столкновений диссипативные характеристики газа и приводит к интегралу столкновений Больцмана (10.5).

Из двух членов, пропорциональных плотности  $n$ , первый (с оператором  $S_{-\infty}^{(3)}$ ) определяет диссипативные характеристики газа в приближении тройных столкновений. Второй определяет вклад двойных столкновений в недиссипативные характеристики газа (например, в выражение для внутренней энергии газа).

Оба этих члена были учтены в кинетическом уравнении в работе Чо — Уленбека (см. в [5]). Мы видим, что кинетическое уравнение Чо — Уленбека учитывает взаимодействие частиц не вполне согласованно: в диссипативные характеристики учитывается вклад как двойных, так и тройных столкновений, а в недиссипативные характеристики — только двойных столкновений.

Вследствие этого Чо и Уленбек при выводе газодинамических уравнений с учетом тройных столкновений вынуждены для согласованности приближений при расчете диссипативных и недиссипативных характеристик вводить, например, в давление дополнительные члены, не вытекающие из их кинетического уравнения (см. стр. 264 [5]).

Рассмотрим кинетическое уравнение для газа, в котором в приближении тройных столкновений учтен вклад взаимодействия частиц как в диссипативные, так и недиссипативные характеристики газа [24, 53].

Запишем три первых уравнения цепочки уравнений Боголюбова для функций распределения  $f_1, f_2, f_3$  для случая пространственно однородного распределения газа и при  $F_0 = 0$ :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = n \int \hat{\theta}_{12} f_2 dx_2 = I, \quad (17.2)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + \hat{H}_2 f_2 = n \int (\hat{\theta}_{13} + \hat{\theta}_{23}) f_3 dx_3 = I_2, \quad (17.3)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial t} + \hat{H}_3 f_3 = n \int (\hat{\theta}_{14} + \hat{\theta}_{24} + \hat{\theta}_{34}) f_4 dx_4 = I_3. \quad (17.4)$$

В § 2 показано, что в приближении двойных столкновений в правой части уравнения (17.3) (см. (2.20))

$$I_2 = \frac{\partial}{\partial t} f_1 f_1. \quad (17.4)_1$$

С учетом (17.4)<sub>1</sub> уравнения (17.2), (17.3) в приближении двойных столкновений образуют замкнутую систему уравнений для функций  $f_1, f_2, \dots$ . Из нее при использовании введенного Боголюбовым условия ослабления начальной корреляции в первом приближении по  $\tau_0/\tau_{ct}$  ( $\tau_0 = r_0/v_T$ ) следует выражение (12.4). Запишем его здесь в виде

$$f_2^{dv} = S_{-\infty}^{(2)} f_1(p_1, t) f_1(p_2, t) - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} \tau \frac{d}{d\tau} S_{-\tau}^{(2)} f_1(p_1, t) f_1(p_2, t) d\tau \equiv f_2^0 + f_2^1. \quad (17.5)$$

Первый член в этом выражении при подстановке в (17.2) приводит к интегралу столкновений Больцмана. Второй член определяет вклад парных столкновений в недиссипативные характеристики.

Рассмотрим приближение тройных столкновений. Для этого в правой части уравнения (17.4) выразим функцию  $f_4$  через функции  $f_1, g_2, g_3, g_4$ . Отбросим член с  $g_4$  и другие члены, отличные от нуля при одновременном сближении четырех частиц. Тогда от  $f_4$ , например в члене, содержащем в (17.4) оператор  $\hat{\theta}_{14}$ , останутся вклады

$$f_4^{(1,4)} = f_1 f_1 f_1 + f_1(1) f_1(2) g_2(3, 4) + f_1(1) f_1(3) g_2(2, 4) + \\ + (f_1(2) f_1(3) + g_2(2, 3)) g_2(1, 4) + f_1(2) g_3(3, 4, 1) + \\ + f_1(3) g_3(4, 1, 2).$$

Здесь мы удержим лишь члены, отличные от нуля при сближении двух частиц «1», «4». Они компенсируют, как мы увидим, расходимость в решении однородного уравнения (17.4) в членах

порядка  $\tau \partial / \partial t$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . Оставляя в выражении для  $f_4^{(1,4)}$  лишь эти члены, получим

$$f_4^{(1,4)} = f_2(1, 4) f_1(2) f_1(3).$$

Принимая во внимание аналогичные вклады в остальные члены правой части уравнения (17.4) и используя уравнение (17.2), получим

$$I_3 = \frac{\partial}{\partial t} f_1 f_1 f_1 \quad (17.6)$$

и, следовательно, для функций  $f_1, f_2, f_3$  получается замкнутая система уравнений.

Из уравнения (17.4) с правой частью (17.6) при условии полного ослабления начальных корреляций и в первом приближении по  $\tau_0 / \tau_{ct}$  находим

$$f_3^{TP}(x_1, x_2, x_3, t) = S_{-\infty}^{(3)} f_1(p_1, t) f_1(p_2, t) f_1(p_3, t) - \\ - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} \tau \frac{d}{d\tau} S_{-\tau}^{(3)} f_1(p_1, t) f_1(p_2, t) f_1(p_3, t) d\tau \equiv f_3^0 + f_3^1. \quad (17.7)$$

Это решение для функции  $f_3$  аналогично решению (17.5) для функции  $f_2$  в приближении двойных столкновений.

Рассмотрим решение уравнения (17.3). При условии полного ослабления начальной корреляции частиц «1», «2» во втором приближении по параметру плотности  $(nr_0^3)^2 \sim nr_0^3 \tau_0 / \tau_{ct}$  получим из (17.3)

$$f_2(x_1, x_2, t) = S_{-\tau}^{(2)}(1, 2) \left(1 - \tau \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f_1(p_1, t) f_1(p_2, t) + \\ + n \int_0^{\tau} d\tau' \int dx_3 S_{-\tau'}^{(2)}(1, 2) (\hat{\theta}_{13} + \hat{\theta}_{23}) \left(1 - \tau' \frac{\partial}{\partial t}\right) f_3^{TP}(1, 2, 3). \quad (17.8)$$

Используя уравнение (17.2) для функций  $f_1(p_1, t), f_1(p_2, t)$  и выполняя предельный переход  $\tau \rightarrow \infty$ , можно записать это выражение в виде

$$f_2(x_1, x_2, t) = \\ = S_{-\infty}^{(2)} f_1 f_1 + n \int_0^{\infty} d\tau \int dx_3 \left(1 - \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) [S_{-\tau}^{(2)}(1, 2) (\hat{\theta}_{13} + \hat{\theta}_{23}) f_3^{TP} - \\ - S_{-\infty}^{(2)}(1, 2) (\hat{\theta}_{13} f_2^{AB}(1, 3) f_1(2) + \hat{\theta}_{23} f_2^{AB}(2, 3) f_1(1))]. \quad (17.9)$$

Если в этом выражении пренебречь членами с  $n\tau \partial / \partial t$ , учитывающими эффект запаздывания в приближении тройных столкновений, учесть, что  $S_{-\infty}^{(2)} = S_{-\tau-\infty}^{(2)}$ , и подставить в (17.9)

выражения (17.5), (17.7) без учета запаздывания, то выражение (17.9) совпадает с (17.1). Подставляя полученное выражение для  $f_2$  в правую часть уравнения (17.2), получим кинетическое уравнение Чо — Уленбека.

Вернемся к выражению (17.9). Представим его в форме, в которой явно выделен вклад двойных столкновений с учетом запаздывания. Для этого прибавим и вычтем в (17.9) член

$$\int_0^{\infty} S_{-\tau'} \frac{\partial f_1 f_1}{\partial t} d\tau',$$

используем уравнение (17.2) и тождество

$$-\int_0^{\infty} (S_{-\tau}^{(2)} - S_{-\infty}^{(2)}) \frac{\partial f_1 f_1}{\partial t} d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} \tau \frac{d}{d\tau} S_{-\tau}^{(2)} f_1 f_1 d\tau. \quad (17.10)$$

Наконец, в члене с  $n\tau\partial/\partial t$  заменим  $S_{-\infty}^{(2)}(1, 2) \rightarrow S_{-\tau-\infty}^{(2)}(1, 2)$ . В результате получим следующее выражение для функции  $f_2$  в приближении тройных столкновений  $f_2^{\text{TP}}$ :

$$\begin{aligned} f_2^{\text{TP}}(x_1, x_2, t) = & f_2^{\text{AB}}(x_1, x_2, t) + \\ & + n \int_0^{\infty} d\tau \int dx_3 S_{-\tau}^{(2)}(1, 2) [(\hat{\theta}_{13} + \hat{\theta}_{23}) f_3^{\text{TP}} - \\ & - \hat{\theta}_{13} f_2^{\text{AB}}(1, 3) f_1(2) - \hat{\theta}_{23} f_2^{\text{AB}}(2, 3) f_1(1)] - \\ & - n \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} d\tau \int dx_3 \tau S_{-\tau}^{(2)}(1, 2) \{(\hat{\theta}_{13} + \hat{\theta}_{23}) f_3^0 - \\ & - S_{-\infty}^{(2)}(1, 2) [\hat{\theta}_{13} f_2^0(1, 3) f_1(2) + \hat{\theta}_{23} f_2^0(2, 3) f_1(1)]\}. \quad (17.11) \end{aligned}$$

Функции  $f_2^0$ ,  $f_3^0$  определяются выражениями (17.5), (17.7) без учета временного запаздывания, т. е.

$$f_2^0 = S_{-\infty}^{(2)} f_1(\mathbf{p}_1, t) f_1(\mathbf{p}_2, t), \quad f_3^0 = S_{-\infty}^{(3)} f_1(\mathbf{p}_1, t) f(\mathbf{p}_2, t) f_1(\mathbf{p}_3, t). \quad (17.12)$$

Подставляя любое из выражений (17.8), (17.9), (17.11) в правую часть уравнения (17.2), получим выражение для интеграла столкновений с учетом тройных столкновений и временного запаздывания.

Покажем, что из полученного в этом приближении кинетического уравнения следует закон сохранения суммарной потенциальной и кинетической энергии. При этом выражение для вну-

тренней энергии содержит три первых члена разложения по степеням плотности.

Подставим  $f_2^{\text{TP}}$  из (17.11) в выражение

$$I^{\text{TP}} = n \int \theta_{12} f_2^{\text{TP}} dx_2, \quad (17.13)$$

определяющее в рассматриваемом приближении интеграл столкновений.

Из выражений (17.13), (17.11), (17.12) следует, что

$$n \int \varphi(\mathbf{p}_1) I^{\text{TP}}(\mathbf{p}_1, t) d\mathbf{p}_1 = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 1, \mathbf{p}_1. \quad (17.14)$$

Эти свойства обеспечивают выполнение законов сохранения числа частиц и импульса рассматриваемой системы.

Умножим теперь выражение (17.13) на  $n\mathbf{p}_1^2/2m$  и проинтегрируем по  $\mathbf{p}_1$ . После интегрирования по частям по  $\mathbf{p}_1$  и симметризации получим

$$n \int \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} I^{\text{TP}} d\mathbf{p}_1 = -\frac{n^2}{2} \int (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_{12}} f_2^{\text{TP}} d\mathbf{r}_{12} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \quad (17.15)$$

$$(\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

Рассмотрим вклады отдельных членов из (17.11) в формулу (17.15). Первый член (17.11) определяет вклад двойных столкновений, поэтому на основании результатов (11.22), (12.15) можем записать

$$\left[ n \int \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} I^{\text{TP}} d\mathbf{p}_1 \right]_1 =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \frac{n^2}{2} \int \Phi_{12} f_1(\mathbf{P}_1(-\infty), t) f_1(\mathbf{P}_2(-\infty), t) d\mathbf{r}_{12} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2. \quad (17.16)$$

Рассмотрим вклад второго члена из (17.11). Введем обозначение

$$A(x_1, x_2, t) = \int [(\hat{\theta}_{13} + \hat{\theta}_{23}) f_3^{\text{TP}} - \hat{\theta}_{13} f_2^{\text{AB}}(1, 3) f_1(2) -$$

$$- \hat{\theta}_{23} f_2^{\text{AB}}(2, 3) f_1(1)] dx_3. \quad (17.17)$$

Тогда из (17.15), (17.11) найдем

$$\left[ n \int \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} I^{\text{TP}} d\mathbf{p}_1 \right]_2 =$$

$$= -\frac{n^3}{2} \iint_0^\infty (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_{12}} S_{\tau}^{(2)} A(x_1, x_2, t) d\tau \frac{dx_1 dx_2}{V}. \quad (17.18)$$

Произведем здесь преобразования, аналогичные сделанным при выводе равенства (11.22). В результате получим, что

$$\left[ n \int \frac{p_1^2}{2m} \Gamma^{\text{TP}} dp_1 \right]_2 = 0. \quad (17.19)$$

Рассмотрим, наконец, вклад последнего члена из (17.11) в выражение (17.15). Введем обозначение

$$B(x_1, x_2, t) = \int \{ (\hat{\theta}_{13} + \hat{\theta}_{23}) f_3^{\text{TP}} - S_{-\infty}^{(2)}(1, 2) (\hat{\theta}_{12} f_2^{\text{ЛВ}}(1, 3) f_1(2) + \hat{\theta}_{23} f_2^{\text{ЛВ}}(2, 3) f_1(1)) \} dx_3. \quad (17.20)$$

Из (17.15), (17.11), (17.20) следует, что

$$\begin{aligned} & \left[ n \int \frac{p_1^2}{2m} \Gamma^{\text{TP}} dp_1 \right]_3 = \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \frac{n^3}{2} \iint_0^{\infty} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_{12}} \tau S_{-\tau}^{(2)}(1, 2) B(x_1, x_2, t) d\tau \frac{dx_1 dx_2}{V}. \end{aligned} \quad (17.21)$$

Производя здесь преобразования, аналогичные проведенным при выводе (12.15), получим

$$\begin{aligned} & \left[ n \int \frac{p_1^2}{2m} \Gamma^{\text{TP}} dp_1 \right]_3 = \\ & = - \frac{n^3}{2} \frac{\partial}{\partial t} \iint_0^{\infty} \Phi_{12} S_{-\tau}^{(2)} B(x_1, x_2, t) d\tau \frac{dx_1 dx_2}{V}. \end{aligned} \quad (17.22)$$

Суммируя результаты (17.16), (17.19), (17.22) и используя обозначение (17.20), получим окончательный результат:

$$\begin{aligned} n \int \frac{p_1^2}{2m} \Gamma^{\text{TP}}(p_1, t) dp_1 = & - \frac{\partial}{\partial t} \frac{n^2}{2} \int \Phi_{12} \left\{ S_{-\infty}^{(2)} f_1 f_1 + \right. \\ & + n \iint_0^{\infty} S_{-\tau}^{(2)}(1, 2) [ (\hat{\theta}_{13} + \hat{\theta}_{23}) S_{-\infty}^{(3)}(1, 2, 3) - S_{-\infty}^{(2)}(1, 2) (\hat{\theta}_{13} S_{-\infty}^{(2)}(1, 3) + \\ & \left. + \hat{\theta}_{23} S_{-\infty}^{(2)}(2, 3)) \right] f_1 f_1 f_1 d\tau dx_3 \left. \right\} \frac{dx_1 dx_2}{V}. \end{aligned} \quad (17.23)$$

Выражение, стоящее в (17.23) в фигурных скобках, совпадает с выражением (17.1), которое определяет два первых члена разложения функции  $f_2$  по плотности.

Таким образом, из кинетического уравнения (17.2) с интегралом столкновений  $\Gamma^{\text{TP}}$  следует закон сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ n \int \frac{p_1^2}{2m} f_1 dp_1 + \frac{n^2}{2} \int \Phi_{12} f_2 \frac{dx_1 dx_2}{V} \right\} = 0, \quad (17.24)$$



в котором функция  $f_2$  определена выражением (17.1). Из (17.14), (17.1) следует выражение для плотности внутренней энергии газа в приближении тройных столкновений. Оно имеет вид

$$U = n \int \frac{p_1^2}{2m} f_1 dp_1 + \frac{n^2}{2} \int \Phi_{12} S_{-\infty}^{(2)}(1, 2) f_1 f_1 \frac{dx_1 dx_2}{V} + \\ + \frac{n^3}{2} \int \Phi_{12} \left\{ \iint_0^{\infty} S_{-\tau}^{(2)}(1, 2) [(\hat{\theta}_{13} + \hat{\theta}_{23}) S_{-\infty}^{(3)} - \right. \\ \left. - S_{-\infty}^{(2)}(1, 2) (\hat{\theta}_{13} S_{-\infty}^{(2)}(1, 3) + \hat{\theta}_{23} S_{-\infty}^{(2)}(2, 3))] f_1 f_1 d\tau dx_3 \right\} \frac{dx_1 dx_2}{V}. \quad (17.25)$$

Это выражение определяет три первых члена вириального разложения внутренней энергии для неравновесных состояний газа.

В приближении локального равновесия выражение (17.25) принимает вид

$$U = n \frac{3}{2} \kappa T + \frac{n^2}{2} \int \Phi_{12} e^{-\Phi_{12}/\kappa T} \frac{dr_1 dr_2}{V} + \\ + \frac{n^3}{2} \int \Phi_{12} e^{-\Phi_{12}/\kappa T} \left\{ \int (e^{-i(\Phi_{13} + \Phi_{23})/\kappa T} - e^{-\Phi_{13}/\kappa T} - \right. \\ \left. - e^{-\Phi_{23}/\kappa T} + 1) dr_3 \right\} \frac{dr_1 dr_2}{V}. \quad (17.26)$$

Оно определяет первые три члена вириального разложения плотности внутренней энергии для равновесных состояний.

Если использовать кинетическое уравнение Чо — Уленбека, то в выражениях (17.25), (17.26) будут лишь по два первых члена, определяющих плотность внутренней энергии в приближении парных столкновений. Это одно из проявлений несогласованности приближений для диссипативных и недиссипативных характеристик, о которой говорилось выше, при использовании кинетического уравнения Чо — Уленбека.

Если распределение частиц газа пространственно неоднородно, то в выражениях для  $f_2^{\text{TP}}$  и  $I^{\text{TP}}$  появляются дополнительные члены.

Используя кинетическое уравнение

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} + F_0 \frac{\partial}{\partial p} \right) f_1 = I^{\text{TP}}(r, p, t), \quad (17.27)$$

можно обычным путем перейти к уравнениям газовой динамики. Выражения для коэффициентов вязкости и теплопроводности совпадают с приведенными в работе Чо — Уленбека (в [5]), для внутренней энергии и давления содержат по три первых члена соответствующих вириальных разложений.

Таким образом, использование рассматриваемого здесь кинетического уравнения позволяет получить уравнения газовой динамики с учетом тройных столкновений как в кинетических коэффициентах, так и в термодинамических функциях.

Напомним, что в приближении парных столкновений коэффициенты вязкости и теплопроводности  $\eta$ ,  $\kappa$  не зависят от плотности газа, а лишь от температуры (см. формулы (7.19)). Это связано с тем, что, например,  $\eta \sim \rho l v_T$ , но длина свободного пробега  $l \sim 1/n$ , а  $\rho \sim n$ .

При учете тройных столкновений возникает зависимость от плотности и коэффициенты вязкости и теплопроводности можно представить в виде

$$\eta = \eta_0 + \varepsilon \eta_1, \quad \kappa = \kappa_0 + \varepsilon \kappa_1, \quad \varepsilon = nr_0^3. \quad (17.28)$$

Здесь  $\eta_0$ ,  $\kappa_0$  — значения этих коэффициентов в приближении парных столкновений.

Расчеты для модели твердых шариков показывают, что [5]

$$\eta_1 = 9,6\eta_0, \quad \kappa_1 = 2,9\kappa_0. \quad (17.29)$$

Значения  $\eta_0$ ,  $\kappa_0$  определяются формулами (7.19).

Рассмотренный метод можно использовать для получения кинетических уравнений для неидеального газа с учетом большого числа столкновений. Такое непосредственное обобщение не представляет, однако, интереса в связи с появлением при учете более сложных взаимодействий расходящихся интегралов.

В следующем параграфе будет рассмотрен один из возможных путей преодоления этой трудности в построении кинетических уравнений для плотных газов.

## § 18. Кинетические уравнения для газов средней плотности

В §§ 12, 17 рассмотрены кинетические уравнения для неидеального газа с учетом двойных и тройных столкновений. Построение по такой схеме кинетических уравнений для более плотных газов, когда необходим учет более сложных столкновений, не может быть осуществлено, так как соответствующие интегралы столкновений расходятся (см. § 16).

Мы видели, что при выводе кинетического уравнения используется условие ослабления быстрых (мелкомасштабных) флуктуаций. Граница раздела быстрых и медленных флуктуаций зависит от рассматриваемого приближения. Она определяется размерами соответствующих физически бесконечно малых интервалов  $\tau_\Phi$ ,  $l_\Phi$  (см. § 16). Для приближения парных столкновений  $\tau_\Phi^{(2)} \sim \sqrt{\varepsilon} \tau_{ст}$ ,  $l_\Phi^{(2)} \sim \sqrt{\varepsilon} l$ . Из § 16 следует, что интеграл столкновений, определяемый столкновениями четырех частиц, не мо-

жет быть построен методом теории возмущения по плотности, так как величины  $\tau_{\phi}^{(4)} \sim \tau_{ст}$ ,  $l_{\phi}^{(4)} \sim l$  и не могут рассматриваться как пренебрежимо малые. Вследствие этого интеграл столкновений явно зависит от  $\tau_{ст}$  (или  $l$ ). Это вносит дополнительную зависимость интеграла столкновений от плотности.

Иными словами, при построении интегралов столкновений, учитывающих столкновения четырех и большего числа частиц, надо строить теории так, чтобы учесть в высших интегралах столкновений вклад двойных столкновений \*).

Используем уравнение Лиувилля, усредненное по физически бесконечно малому объему  $l_{\phi}^3$ , определенному в приближении парных столкновений [23, 24]. Из (16.3)  $(l_{\phi})^3 \sim 1/\sqrt{\varepsilon}n$  (напомним, что  $l_{\phi} \sim \sqrt{\varepsilon}l \ll l$ ). Обозначим соответствующую усредненную функцию распределения через  $\bar{f}_N$ .

Чтобы получить уравнение для этой функции, поступим следующим образом. Представим двухчастичную функцию  $\bar{f}_2(x_1, x_2, t)$  в виде

$$\bar{f}_2(x_1, x_2, t) = \bar{f}_2 + f_2^{(1)}. \quad (18.1)$$

Здесь  $\bar{f}_2$  — сглаженная функция распределения, описывающая поведение частиц на расстояниях  $|r_1 - r_2| \gg l_{\phi}$ :

$$f_2^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad |r_1 - r_2| \gg l_{\phi}. \quad (18.2)$$

При условии полного ослабления начальных корреляций в нулевом приближении по параметру плотности функция  $\bar{f}_2$  выражается через одночастичные функции распределения (10.4)

$$\bar{f}_2(x_1, x_2, t) = \bar{f}_1(P_1(-\infty), t) \bar{f}_1(P_2(-\infty), t). \quad (18.3)$$

Если вместо условия полного ослабления начальных корреляций использовать условие ослабления мелкомасштабных флуктуаций с  $r_{кор} \ll l$ ,  $\tau_{кор} \ll \tau_{ст}$ , то вместо (18.3) следует использовать более общее выражение

$$\bar{f}_2(x_1, x_2, t) = \bar{f}_2(r_1, P_1(-\infty), r_1, P_2(-\infty), t). \quad (18.4)$$

Здесь  $r_2 = r_1$ , так как в выражении (18.3) не учтено пространственное изменение функций  $\bar{f}_1$  на расстояниях порядка  $r_0$ . Не учтено также и временное запаздывание. Если учесть и то, и другое, то в первом приближении по параметрам  $\tau_0/\tau_{ст}$ ,  $r_0/l$  вместо (18.3) надо использовать выражения (15.2), (15.4). При

\*) Мы следуем здесь работе [23]. Близкая схема для идеального газа жестких сфер развивалась в работе Хопфилда и Бастина [64].

условии ослабления лишь мелкомасштабных флуктуаций вместо (18.4) используем более общее выражение

$$f_2(x_1, x_2, t) = \left(1 - \frac{r_{12}}{2} \frac{\partial}{\partial r_1}\right) \bar{f}_2(r_1, P_1(-\infty), r_1, P_2(-\infty), t) - \\ - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_1 + v_2}{2} \frac{\partial}{\partial r_1}\right) \int_0^\infty \tau \frac{d}{d\tau} \bar{f}_2(r_1, P_1(-\tau), r_1, P_2(-\tau), t) d\tau. \quad (18.5)$$

Если ограничиться приближением (18.4), то, как мы увидим, учет парных столкновений в уравнении для сглаженной функции  $\bar{f}_N$  и в соответствующей цепочке уравнений для функций  $\bar{f}_1 \equiv f_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$  будет учтен лишь диссипативный вклад, обусловленный парными столкновениями. При использовании выражения (18.5) в первом приближении по  $\tau_0/\tau_{ст}, r_0/l$  будет учтен и недиссипативный вклад.

Для упрощения записи мы используем приближение (18.4). Недиссипативные вклады парных столкновений можно будет учесть в окончательных результатах. Напомним, что в (18.4)  $P_{1,2}$  — начальные импульсы частиц, сталкивающихся в момент времени  $t$ .

При  $|r_1 - r_2| < l_\Phi$  функция (18.4) — быстроменяющаяся функция  $r_1, r_2$  и соответствует функции  $f_2^{(1)}$  в (18.1). При  $|r_1 - r_2| > l_\Phi$  в (18.4)  $P_{1,2} = p_{1,2}$  и  $f_2(x_1, x_2, t) = \bar{f}_2(x_1, x_2, t)$ , что также соответствует определению (18.1).

В приближении теории возмущений по взаимодействию импульсы  $P_{1,2}(-\tau)$  определяются выражением (13.7). Используя это выражение, из (18.4) в приближении теории возмущений получим следующее выражение для функции  $f_2$ :

$$f_2(x_1, x_2, t) = \bar{f}_2(x_1, x_2, t) + \\ + \int_0^\infty \frac{\partial \Phi_{12}(|r_1 - r_2 - (v_1 - v_2)\tau|)}{\partial r_1} \left(\frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{\partial}{\partial p_2}\right) \bar{f}_2(x_1, x_2, t) d\tau. \quad (18.6)$$

Второй член здесь исчезает при  $|r_1 - r_2| > l_\Phi$  и соответствует  $f_2^{(1)}$  в (18.1).

В соответствии со структурой уравнения Лиувилля (1.11)

$$\left(\hat{L}_{x_1, \dots, x_N} - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \hat{\theta}_{ij}\right) \hat{f}_N = 0; \quad (18.7)$$

в каждом из слагаемых  $\hat{\theta}_{ij}, \hat{f}_N$  мелкомасштабные движения в парном приближении достаточно учесть лишь для частиц с номерами  $i, j$ . Введем поэтому обозначение

$$\hat{f}_N^{(ij)} = \bar{f}_N(x_1, \dots, r_i, P_i, \dots, r_j, P_j, \dots, x_N, t). \quad (18.8)$$

Здесь можно положить  $r_i = r_j$ , так как пространственная неоднородность на малых масштабах не учитывается.

Принимая во внимание, что

$$\widetilde{\theta_{ij} f_N} = \bar{\theta}_{ij} \tilde{f}_N + \theta_{ij} \widetilde{f_N^{(ij)}}, \quad (18.9)$$

получим уравнение Лиувилля для сглаженной функции распределения

$$\hat{L}_{x_1, \dots, x_N}^0 \tilde{f}_N - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \tilde{\theta}_{ij} \tilde{f}_N = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \widetilde{\theta_{ij} f_N^{(ij)}}. \quad (18.10)$$

В дальнейшем знак  $\sim$  над  $\hat{\theta}_{ij}$  и над правой частью уравнения (18.10) будем опускать там, где это не будет приводить к недоразумению.

На основе уравнения (18.10) можно построить цепочку уравнений для сглаженных функций распределения  $\tilde{f}_1 \equiv f_1$ ,  $\tilde{f}_2$ ,  $\tilde{f}_3$  и т. д. Из (18.10) следует, что первое уравнение цепочки имеет вид

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial r_1} + F_0 \frac{\partial}{\partial p_1} \right) f_1 = \\ = \frac{N-1}{V} \int \hat{\theta}_{12} (\tilde{f}_2(x_1, x_2, t) + f_2^{(1,2)}(x_1, x_2, t)) dx_2. \end{aligned} \quad (18.11)$$

Здесь согласно (18.8)

$$f_2^{(1,2)}(x_1, x_2, t) = \tilde{f}_2(r_1, P_1(-\infty), r_1, P_2(-\infty), t). \quad (18.12)$$

Запишем второе уравнение цепочки

$$\begin{aligned} \hat{L}_{x_1, x_2}^0 \tilde{f}_2 - \hat{\theta}_{12} (\tilde{f}_2 + f_2^{(1,2)}) = \\ = \frac{N-2}{V} \int [\hat{\theta}_{13} (\tilde{f}_3 + f_3^{(1,3)}) + \hat{\theta}_{23} (\tilde{f}_3 + f_3^{(2,3)})] dx_3. \end{aligned} \quad (18.13)$$

Естественно, что эта цепочка уравнений для сглаженных функций распределения также является незамкнутой. Вследствие этого снова возникает вопрос о приближениях, при которых возможен обрыв цепочки уравнений и получение замкнутой системы уравнений для конечного числа сглаженных функций распределения.

Введем двухчастичные корреляционные функции, соответствующие функциям  $\tilde{f}_2$ ,  $f_2^{(1,2)}$ . С учетом (18.4)

$$\tilde{f}_2(x_1, x_2, t) = f_1(x_1, t) f_1(x_2, t) + \tilde{g}_2(x_1, x_2, t), \quad (18.14)$$

$$\begin{aligned} f_2^{(1,2)}(x_1, x_2, t) = f_1(r_1, P_1(-\infty), t) f_1(r_1, P_2(-\infty), t) + \\ + \tilde{g}_2(r_1, P_1(-\infty), r_1, P_2(-\infty), t). \end{aligned} \quad (18.15)$$

Если корреляционные функции в (18.14), (18.15) равны нулю, то первое уравнение цепочки (18.10) становится замкнутым и совпадает с кинетическим уравнением Больцмана с интегралом столкновений (10.5) (или (15.6)).

Итак, самый грубый обрыв цепочки уравнений для сглаженных функций распределения, соответствующий полному пренебрежению корреляциями  $\tilde{g}_2, \tilde{g}_3, \dots$ , приводит к кинетическому уравнению Больцмана для идеального газа, которое учитывает диссипацию, обусловленную парными столкновениями.

Если вместо (18.4) использовать более общее выражение (18.5), то в нулевом приближении по сглаженным корреляционным функциям  $\tilde{g}_2, \tilde{g}_3, \dots$  получится кинетическое уравнение Больцмана с интегралом столкновений (15.5), т. е. кинетическое уравнение для неидеального газа.

Рассмотрим более высокое приближение по корреляционным функциям. На малых масштабах можно пренебречь корреляционной функцией  $\tilde{g}_2$ , т. е. вторым членом в (18.15), так как на малых расстояниях (порядка  $r_0$ ) основную роль играют корреляции за счет парных столкновений, но они учитываются первым членом в выражении (18.15).

При этих предположениях первое уравнение цепочки (18.11) с учетом определения (18.14) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial r_1} + F \frac{\partial}{\partial p_1}\right) f_1(x, t) = I(x_1, t) \equiv \\ \equiv I_B(x_1, t) + \tilde{I}(x_1, t). \quad (18.16)$$

Здесь  $I$  — соответствующий интеграл «столкновений». Он состоит из суммы двух частей:  $I_B$  — больцмановский интеграл столкновений (10.5) или в более общем случае интеграл столкновений, определяемый выражениями (15.5) — (15.8),  $\tilde{I}$  — часть интеграла столкновений, определяемая крупномасштабными флуктуациями:

$$\tilde{I} = \frac{N-1}{V} \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial r_1} \frac{\partial}{\partial p_1} \tilde{g}_2(x_1, x_2, t) dx_2. \quad (18.17)$$

Здесь можно  $(N-1)/V$  заменить на  $n$ . Именно через этот член и будет учитываться в кинетическом уравнении вклад взаимодействий более сложных, чем парные взаимодействия частиц.

Обратимся теперь к уравнению (18.13) для функции  $\tilde{f}_2$ . Выразим функции распределения  $f_3^{(1,3)}$ ,  $f_3^{(2,3)}$  через корреляционные функции. Эти соотношения аналогичны равенству (2.5). Например,

$$f_3^{(1,3)}(x_1, x_2, x_3, t) = f_1(r_1, P_1, t) f_1(x_2, t) f_1(r_1, P_3, t) + \\ + f_1(r_1, P_1, t) \tilde{g}_2(x_2, r_1, P_3, t) + f_1(x, t) \tilde{g}_2(r_1, P_1, r_1, P_3, t) + \\ + f_1(r_1, P_3, t) \tilde{g}_2(r_1, P_1, x_2, t) + \tilde{g}_3(r_1, P_1, x_2, r_1, P_3, t). \quad (18.18)$$

Выражение для функции  $f_2^{(2,3)}$  следует из (18.18) при «1»  $\rightleftharpoons$  «2». В выражении (18.18) можно пренебречь третьим членом и последним членом, так как крупномасштабные корреляции на малых расстояниях несут незначительный вклад. Подставим при сделанных упрощениях выражение (18.18) и соответствующие выражения для  $f_3^{(2,3)}$  в правую часть уравнения (18.13). Введем обозначение для линеаризованного интеграла столкновений Больцмана (10.5):

$$\delta \hat{I}_{x_1} \{ \delta f(x_1, t) \} = -n \int \hat{\theta}_{12} [f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_1(-\infty), t) \delta f(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_2(-\infty), t) + \\ + \delta f(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_1(-\infty), t) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_2(-\infty), t)] dx_2. \quad (18.19)$$

Знак «—» введен здесь в определение оператора  $\delta \hat{I}$  для удобства записи дальнейших выражений.

Рассмотрим результат действия оператора  $\delta \hat{I}$  на корреляционные функции  $\tilde{g}_2$ . Например,

$$\delta \hat{I}_{x_1} \{ \tilde{g}_2(x_1, x_2, t) \} = \\ = -n \int \hat{\theta}_{13} [f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_1(-\infty), t) \tilde{g}_2(x_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{P}_3(-\infty), t) + \\ + \tilde{g}_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_2(-\infty), x_2, t) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_3(-\infty), t)] dx_3. \quad (18.20)$$

Аналогичным образом определяется выражение  $\delta \hat{I}_{x_2} \{ \tilde{g}_2(x_1, x_2, t) \}$ .

Используя эти обозначения, запишем уравнение (18.13) в виде

$$L_{x_1, x_2}^0 \tilde{f}_2 + (\delta \hat{I}_{x_1} + \delta \hat{I}_{x_2}) \tilde{g}_2 = \hat{\theta}_{12} \tilde{f}_2 + \overline{\hat{\theta}_{12} f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_1, t) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_2, t)} - \\ - \frac{1}{N} [I_B(x, t) f_1(x_2, t) + I_B(x_2, t) f_1(x_1, t)] + \\ + \frac{N-2}{V} \int (\hat{\theta}_{13} + \hat{\theta}_{23}) \tilde{f}_3 dx_3 + \\ + [I_B(x_1, t) f_1(x_2, t) + I_B(x_2, t) f_1(x_1, t)]. \quad (18.21)$$

В правой части этого уравнения использовано выражение для интеграла столкновений Больцмана

$$I_B(x_1, t) = \frac{N-1}{V} \int \hat{\theta}_{12} f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_1(-\infty), t) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_2(-\infty), t) dx_2.$$

В (18.21) из последнего члена выделена часть, пропорциональная  $1/(N-1) \approx 1/N$ . Смысл такого выделения станет ясным ниже. Мы не приводим также пока предельный переход  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$ , чтобы оставить возможность рассматривать флуктуации в системах с конечным числом частиц. При этом можно, конечно,  $N-1$  заменить на  $N$ , так как  $N \gg 1$ .

Если уравнение (18.21) умножить на  $1/V$  и проинтегрировать по  $x_2$ , то оно совпадет с кинетическим уравнением (18.16). Чтобы

убедиться в этом, надо использовать определение (18.20) и свойство корреляционных функций (2.8).

Продолжим преобразование уравнения (18.21). Подставим в левую часть уравнения вместо функции  $\tilde{f}_2$  выражение  $f_1 f_1 + \tilde{g}_2$  и исключим производные функций  $\tilde{f}_1$  с помощью кинетического уравнения (18.16) для функции  $\tilde{f}_1(x_1, t)$  и соответствующего уравнения для функции  $\tilde{f}_1(x_2, t)$ . В результате получим

$$\begin{aligned} & (\hat{L}_{x_1, x_2}^0 + \delta\hat{I}_{x_1} + \delta\hat{I}_{x_2}) \tilde{g}_2 = \\ & = \left[ \hat{\theta}_{12} \tilde{f}_2(x_1, x_2, t) - \frac{1}{V} \int (\hat{\theta}_{13} \tilde{f}_2(1, 3) f_1(2) + \hat{\theta}_{23} \tilde{f}_2(2, 3) f_1(1)) dx_3 \right] + \\ & \quad + \hat{\theta}_{12} f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_1, t) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_2, t) - \\ & \quad - \frac{1}{N} [I_B(x_1, t) f_1(x_2, t) + I_B(x_2, t) f_1(x_1, t)] + \\ & \quad + \frac{N-2}{V} \int [\hat{\theta}_{13} (\tilde{f}_3 - \tilde{f}_2(1, 3) f_1(2)) + \hat{\theta}_{23} (\tilde{f}_3 - \tilde{f}_2(2, 3) f_1(1))] dx_3. \end{aligned} \quad (18.22)$$

Второй член в правой части появился вследствие того, что перед интегралами, содержащими функции  $\tilde{f}_2$ , стоит в (18.22) множитель  $(N-2)/V$ , а в уравнении (18.16)  $(N-1)/V$ .

Исключим функции  $\tilde{f}_2, \tilde{f}_3$  с помощью выражения (18.14) и соответствующего выражения для функции  $\tilde{f}_3$ :

$$\tilde{f}_3 = f_1 f_1 + f_1(1) \tilde{g}_2(2, 3) + f_1(2) \tilde{g}_2(1, 3) + f_1(3) \tilde{g}_2(1, 2) + \tilde{g}_3. \quad (18.23)$$

Выражения, стоящие в скобках, в последнем члене (18.22) принимают вид

$$\begin{aligned} \tilde{f}_3 - \tilde{f}_2(1, 3) f_1(2) &= f_1(1) \tilde{g}_2(2, 3) + f_1(3) \tilde{g}_2(1, 2) + \tilde{g}_3, \\ \tilde{f}_3 - \tilde{f}_2(2, 3) f_1(1) &= f_1(2) \tilde{g}_2(1, 3) + f_1(3) \tilde{g}_2(1, 2) + \tilde{g}_3. \end{aligned} \quad (18.24)$$

Члены, содержащие функции  $f_1(3)$ , перенесем в левую часть и используем обозначение (2.10) для средней силы. Тогда в левой части вместо оператора  $\hat{L}^0$  будет стоять оператор  $\hat{L}$ . Он определяется формулой (1.8), если в ней заменить  $F_0$  на  $F$ . В результате получаем следующее уравнение для функции  $\tilde{g}_2$ :

$$\begin{aligned} & (\hat{L}_{x_1, x_2} + \delta\hat{I}_{x_1} + \delta\hat{I}_{x_2}) \tilde{g}_2 = \hat{\theta}_{12} (f_1 f_1 + \tilde{g}_2) - \\ & - \frac{1}{V} \int [\hat{\theta}_{13} (f_1 f_1 + \tilde{g}_2(1, 3)) f_1(2) + \hat{\theta}_{23} (f_1 f_1 + \tilde{g}_2(2, 3)) f_1(1)] dx_3 + \\ & + \hat{\theta}_{12} f_1(\mathbf{P}_1, t) f_1(\mathbf{P}_2, t) - \frac{1}{N} [I_B(x_1, t) f_1(x_2, t) + I_B(x_2, t) f_1(x_1, t)] + \\ & + n \int [\hat{\theta}_{13} (f_1(1) \tilde{g}_2(2, 3) + \tilde{g}_3) + \hat{\theta}_{23} (f_1(2) \tilde{g}_2(1, 3) + \tilde{g}_3)] dx_3. \end{aligned} \quad (18.25)$$



Рассмотрим роль отдельных членов в правой части этого уравнения. Последний член в правой части пропорционален  $n$ . Он учитывает тройные и более сложные взаимодействия частиц. Первые четыре члена определяют вклад парных столкновений.

Этот вклад в свою очередь можно подразделить на две части. Первые два члена определяют вклад взаимодействий на расстояниях  $r_{12} > l_\phi$ , а следующие два члена — на расстояниях  $r_{12} < l_\phi$ . Второй и четвертый члены, пропорциональные соответственно  $1/V$  и  $1/N$ , обеспечивают существование решений уравнения (18.25) таких, что

$$\frac{1}{V} \int \tilde{g}_2(x_1, x_2, t) dx_2 = \frac{1}{V} \int \tilde{g}_2(x_1, x_2, t) dx_1 = 0.$$

Необходимость выполнения этих равенств следует из определения корреляционной функции  $\tilde{g}_2$  (ср. с условиями (2.8)).

Вклад тройных и более сложных взаимодействий входит в кинетическое уравнение (18.16) через интеграл  $\tilde{I}$ . Этот интеграл определяется функцией  $\tilde{g}_2$ , которую следует определять из уравнения (18.25).

Сравним уравнение (18.25) со вторым уравнением цепочки уравнений Боголюбова (1.20). Для удобства сравнения с (18.25) запишем вместо (1.20), используя уравнение (1.19), уравнение для корреляционной функции  $g_2 = \tilde{f}_2 - \tilde{f}_1 \tilde{f}_1$ .

Из уравнений (1.20), (1.19) с учетом равенств (2.4), (2.5) получаем

$$\begin{aligned} (\hat{L}_{x_1, x_2} - \hat{\theta}_{12}) g_2(x_1, x_2, t) &= \hat{\theta}_{12} \tilde{f}_1(x_1, t) \tilde{f}_1(x_2, t) + \\ &+ n \int [\hat{\theta}_{13} (\tilde{f}_1(1) g_2(2, 3) + g_3) + \hat{\theta}_{23} (\tilde{f}_1(2) g_2(1, 3) + g_3)] dx_3. \end{aligned} \quad (18.26)$$

Здесь в отличие от (18.25) опущен член  $\sim 1/V$ .

В приближении двойных столкновений уравнение для функции  $g_2$  (см. (2.19)) можно записать в виде

$$(\hat{L}_{x_1, x_2} - \hat{\theta}_{12}) g_2(x_1, x_2, t) = \hat{\theta}_{12} \tilde{f}_1(x_1, t) \tilde{f}_1(x_2, t). \quad (18.27)$$

Из сравнения уравнений (18.26), (18.27) следует, что вклад тройных и более сложных взаимодействий определяется вторым членом в правой части уравнения (18.26), который пропорционален плотности  $n$ . Он совпадает по форме с соответствующим членом в уравнении (18.25).

В § 16 уже говорилось о том, что использование теории возмущений по плотности при решении цепочки уравнений Боголюбова приводит в кинетических уравнениях к появлению расходящихся интегралов. Положение, однако, меняется, если теорию возмущений использовать для решения цепочки уравнений для сглаженных функций распределения  $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots$

Поскольку в уравнениях (18.25), (18.26) члены, учитывающие вклады тройных, четверных и высших взаимодействий, совпадают, то основное различие будет состоять в замене оператора

$$\hat{L}_{x_1, x_2} - \hat{\theta}_{12} \quad \text{в (18.26)} \quad (18.28)$$

на оператор

$$\hat{L}_{x_1, x_2} - \hat{\theta}_{12} + \delta\hat{I}_{x_1} + \delta\hat{I}_{x_2} \quad \text{в (18.25)}. \quad (18.29)$$

При решении уравнения (18.25) можно опустить решение однородного уравнения, так как вследствие наличия членов  $\delta\hat{I}_{x_1}$ ,  $\delta\hat{I}_{x_2}$  в (18.25) начальная корреляция  $\tilde{g}_2$  затухает за время порядка  $\tau_{\text{CT}}^{(2)}$ , а характерные времена интегралов тройных и четверных столкновений порядка соответственно  $\tau_{\text{CT}}^{(2)}/\epsilon$ ,  $\tau_{\text{CT}}^{(2)}/\epsilon^2$ .

В решении неоднородного уравнения (18.25) из-за наличия диссипативного члена  $(\delta\hat{I}_{x_1} + \delta\hat{I}_{x_2})\tilde{g}_2 \sim \tilde{g}_2/\tau_{\text{CT}}^{(2)}$  происходит обрезание интегралов столкновений на временах  $t \sim \tau_{\text{CT}}^{(2)}$ , т. е. на временах порядка времени свободного пробега при парных столкновениях.

Например, при учете тройных столкновений в выражении (17.9) произойдет замена

$$\int_0^{\infty} d\tau S_{-\tau}^{(2)}(1, 2) \dots \rightarrow \int_0^{\infty} d\tau e^{-\tau/\tau_{\text{CT}}^{(2)}} S_{-\tau}^{(2)}(1, 2). \quad (18.30)$$

Таким образом, расходимость в интегралах столкновений, учитывающих вклады тройных и более сложных столкновений, ликвидируется благодаря учету диссипативного вклада, обусловленного парными столкновениями, в уравнениях для функций  $\tilde{f}_2$ ,  $\tilde{f}_3$ , ... Аналогичный результат можно получить с помощью диаграммной техники, если просуммировать наиболее сильно расходящиеся диаграммы, возникающие при разложении по степеням плотности [22, 54].

Появление дополнительного обрезания при  $t \sim \tau_{\text{CT}}^{(2)}$  приводит к дополнительной зависимости от плотности в интегралах столкновений и определяемых ими кинетических коэффициентах.

Например, для коэффициента вязкости  $\eta$  вместо предполагавшегося вириального разложения по параметру плотности  $\epsilon = nr_0^3$ :

$$\eta = \eta_0(T) + \epsilon\eta_1(T) + \epsilon^2\eta_2(T) + \dots \quad (18.31)$$

первые три члена ряда имеют вид

$$\eta = \eta_0(T) + \epsilon\eta_1(T) + \epsilon^2 \ln(1/\epsilon) \eta'(T). \quad (18.32)$$

В (18.31), (18.32) величины  $\eta_0$ ,  $\eta_1$  определяются соответственно парными и тройными столкновениями. Следующий член вириального ряда (18.31) не может быть найден из-за расходимости интеграла, учитывающего вклад четверных столкновений. Расходимость носит логарифмический характер  $\ln(\tau/\tau_0)$ , поэтому при наличии обрезания (18.30)  $\ln(\tau/\tau_0)$  может быть приближенно заменен на

$$\ln(\tau_{\text{ст}}^{(2)}/\tau_0) = \ln(1/\epsilon). \quad (18.33)$$

Вследствие этого третий член в (18.32), учитывающий вклад четверных столкновений, пропорционален  $\epsilon^2 \ln(1/\epsilon)$  и, следовательно, неаналитически зависит от параметра плотности.

Имеющиеся экспериментальные данные зависимости коэффициента вязкости от плотности не позволяют пока подтвердить логарифмическую зависимость от плотности [55].

## § 19. О статистическом описании неравновесных процессов в плотных газах

Мы рассмотрели кинетические уравнения для неидеального газа в приближении двойных и тройных столкновений. Возможно, как было показано в § 18, построение кинетических уравнений и для более плотных газов, когда становятся существенными одновременные взаимодействия четырех и большего числа частиц. Такой путь последовательных приближений при построении кинетических уравнений для плотных газов, однако, мало эффективен. Здесь нужен иной подход. Он аналогичен тому, который используется в равновесной статистической теории плотных газов и жидкостей (§ 9).

Для термодинамических функций существуют разложения по плотности (§ 8) — вириальные разложения. Однако практически используются лишь несколько первых членов разложения. Расчет термодинамических функций для плотных газов и жидкостей производится либо численными методами (метод молекулярной динамики, метод Монте-Карло), либо путем решения (аналитического или численного) модельных интегральных уравнений для двухчастичной корреляционной функции  $g_2$ . В § 9 мы рассмотрели различные типы таких уравнений. Все эти уравнения дают возможность точно определить вклады в термодинамические функции первых трех членов вириальных разложений и приближенно вклады более высокого порядка по параметру плотности.

Аналогичный путь возможен и при построении кинетической теории плотных газов. Вместо одного кинетического уравнения для функции  $f_1$  для описания неравновесных процессов в плотных газах следует по меньшей мере использовать систему двух

уравнений для функций  $f_1$ ,  $g_2$  или функций  $f_1$ ,  $f_2$ . Рассмотрим пример такой системы.

Мы видели, что выражение (17.11) для функции  $f_2$  определяется суммой вкладов двойных и тройных столкновений с учетом временного запаздывания. Вклад двойных взаимодействий описывается первым членом правой части выражения (17.11). Он в свою очередь состоит из двух членов (см. (17.5)). Первый имеет нулевой порядок по плотности и определяет в интеграле столкновений диссипативный вклад в приближении парных столкновений. Второй определяет вклад парных столкновений в недиссипативные функции, например внутреннюю энергию, под знаком  $\partial/\partial t$ . Формально этот член можно отнести к членам первого порядка по плотности в  $f_2$ . Однако, как уже говорилось в § 17, формальное использование разложения по плотности в функции  $f_2$  приводит к несогласованности описания диссипативных и недиссипативных процессов.

Учитывая это, при обобщении выражения (17.11) за нулевое приближение для функции  $f_2$  будем принимать выражение  $f_2^{\text{дв}}$ , определяемое формулой (17.5). Оно описывает полный вклад парных столкновений в кинетическое уравнение. Первое приближение для функции  $f_2$  описывается остальными членами в (17.11). Они определяют полный вклад тройных столкновений в кинетическое уравнение.

Используем для функции распределения аналог суперпозиционного приближения Кирквуда в виде

$$f_3(x_1, x_2, x_3, t) = f_3^{\text{TP}} \frac{f_2(x_1, x_2, t) f_2(x_1, x_3, t) f_2(x_2, x_3, t)}{f_2^{\text{дв}}(x_1, x_2, t) f_2^{\text{дв}}(x_1, x_3, t) f_2^{\text{дв}}(x_2, x_3, t)}. \quad (19.1)$$

Входящие сюда функции  $f_2^{\text{дв}}$ ,  $f_3^{\text{TP}}$  определяются выражениями (17.5), (17.7).

В первом приближении, когда (см. (17.5))

$$f_2 = f_2^{\text{дв}} = S_{-\infty}^{(2)} f_1 f_1 - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} \tau \frac{d}{d\tau} S_{-\tau}^{(2)} f_1 f_1 d\tau \equiv f_2^0 + f_2^1, \quad (19.2)$$

из (19.1), (19.2), (17.7) находим

$$f_3 = f_3^{\text{TP}} = S_{-\infty}^{(3)} f_1 f_1 f_1 - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} \tau \frac{d}{d\tau} S_{-\tau}^{(3)} f_1 f_1 f_1 d\tau \equiv f_3^0 + f_3^1. \quad (19.3)$$

В равновесном состоянии для функции распределения координат  $f_3(r_1, r_2, r_3)$  из (19.1) с учетом того, что

$$\begin{aligned} f_2^{\text{дв}}(r_1, r_2) &= \exp(-\Phi_{12}/kT), \\ f_3^{\text{TP}}(r_1, r_2, r_3) &= \exp[-(\Phi_{12} + \Phi_{13} + \Phi_{23})/kT], \end{aligned} \quad (19.4)$$

следует выражение

$$f_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) f_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3), \quad (19.5)$$

совпадающее с суперпозиционным приближением Кирквуда (9.1).

Для определения функции  $f_2$  заменим выражение (17.11), определяющее функцию  $f_2$  в приближении тройных столкновений, интегральным уравнением

$$\begin{aligned} f_2(x_1, x_2, t) = & f_2^0 + f_2^1 + n \int_0^\infty d\tau \int dx_3 S_{-\tau}^{(2)}(1, 2) [(\hat{\theta}_{13} + \hat{\theta}_{23}) f_3 - \\ & - \hat{\theta}_{13} f_2(1, 3) f_1(2) - \hat{\theta}_{23} f_2(2, 3) f_1(1)] - \\ & - n \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty d\tau \int dx_3 \tau S_{-\tau}^{(2)}(1, 2) \{(\hat{\theta}_{13} + \hat{\theta}_{23})(f_3 - f_3^0) - \\ & - S_{-\infty}^2(1, 2) [\hat{\theta}_{13}(f_2(1, 3) - f_2^1(1, 3)) f_1(2) + \\ & + \hat{\theta}_{23}(f_2(2, 3) - f_2^1(2, 3)) f_1(1)]\}. \quad (19.6) \end{aligned}$$

Функции  $f_2^0$ ,  $f_2^1$ ,  $f_3^1$ , входящие в это интегральное уравнение, определяются выражениями (19.2), (19.3), а  $f_3$  — формулой (19.1).

В приближении тройных столкновений в интегральное уравнение (19.6) в интегральные члены следует подставить  $f_2 = f_2^{\text{дв}} \equiv f_2^0 + f_2^1$  и  $f_3 = f_3^{\text{тр}} \equiv f_3^0 + f_3^1$ . Тогда выражение (19.6) совпадет с (17.11).

Уравнения (17.2), (19.6) составляют замкнутую систему уравнений для функций  $f_1$ ,  $f_2$ . В равновесном состоянии уравнение (19.6) для функции  $f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  совпадает с соответствующим уравнением, которое следует в суперпозиционном приближении Кирквуда из цепочки уравнений для равновесных функций распределения (§ 8).

Можно использовать вместо (19.6) другие типы приближенных интегральных уравнений для функций  $f_2(x_1, x_2, t)$ , которые в равновесном случае переходят в уравнения Перкуса — Йевики (9.2), (9.3) или уравнение (9.6).

## § 20. Обобщенное кинетическое уравнение

В § 16 уже отмечалось, что в последние годы появился целый ряд работ, в которых различными методами стремятся получить наиболее общее кинетическое уравнение, учитывающее сразу корреляции любого порядка. Просто и изящно эта задача решена в работе Зубарева и Новикова [52]. Суть этой работы состоит в следующем.

Выразим интеграл столкновений через функцию распределения всех  $N$  частиц  $F_N = V^N f_N$  ( $(1/V^N) \int F_N dx_1 \dots dx_N = 1$ ). Для пространственно однородного распределения частиц из (2.13) следует

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = I(p_1, t) = n \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial r_1} \frac{\partial F_N}{\partial p_1} \frac{dx_2 \dots dx_N}{V^{N-2}}. \quad (20.1)$$

Для функции  $F_N$  в работе [52] используется уравнение Лиувилля. Решая уравнение для  $F_N$  при условии ослабления всех начальных корреляций, можно выразить функцию  $F_N$  через одночастичные функции распределения. Подставляя это выражение в уравнение (20.1), получаем замкнутое уравнение для функции  $f_1$  — обобщенное кинетическое уравнение.

Использование в качестве уравнения для  $F_N$  уравнения Лиувилля приводит, однако, к некоторым трудностям при переходе к обычной (больцмановской) форме интеграла столкновений и при выводе законов сохранения. Этим трудностей можно избежать, если в качестве уравнения для  $F_N$  использовать уравнение

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \hat{H}_N \right) F_N = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{1 \leq i \leq N} \left( v_i \frac{\partial}{\partial r_i} + F \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \right) \prod_{1 \leq i \leq N} f_1(x_i, t). \quad (20.2)$$

Это уравнение имеет такую же структуру, как и уравнение (2.18) для  $f_2$  в приближении парных столкновений или уравнение (17.4) с правой частью (17.6) в приближении тройных столкновений.

Существенно, что уравнение (20.2) не есть уравнение Лиувилля. Это есть  $N$ -е уравнение цепочки уравнений Боголюбова в приближении, когда пренебрегаем столкновениями  $N+1$  частиц. Считаем здесь, что  $N \gg 1$ .

При условии полного ослабления начальных корреляций решение уравнения (20.2) для пространственно однородного газа можно записать в виде [24]

$$F_N = \prod_{1 \leq i \leq N} f_1(x_i, t) + \int_0^t \frac{d}{d\tau'} (S_{-\tau'}^{(N)}) \prod_{1 \leq i \leq N} f(x_i, t - \tau') d\tau'. \quad (20.3)$$

Подставляя (20.3) в (20.1), получим интеграл столкновений обобщенного кинетического уравнения.

Рассмотренные выше кинетические уравнения следуют из обобщенного кинетического уравнения, если использовать виртуальные разложения для неравновесных функций распределе-

ния. Эти разложения были получены в работах Коэна [22] и других авторов.

Полученный таким путем интеграл столкновений обладает свойствами (11.5) при  $\varphi = 1$ ,  $\mathbf{p}_1$ . При  $\varphi = \mathbf{p}_1^2/2m$  из (20.1), (20.3) следует

$$n \int \frac{p_1^2}{2m} I(x_1, t) dx_1 = -\frac{n^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int \Phi_{12} F_N \frac{dx_1 \dots dx_N}{V^{N-1}}. \quad (20.4)$$

В соответствии с этим выражение для плотности внутренней энергии имеет вид

$$U = n \int \frac{p_1^2}{2m} f_1 \frac{dx_1}{V} + \frac{n^2}{2} \int \Phi_{12} F_N \frac{dx_1 \dots dx_N}{V^{N-1}}. \quad (20.5)$$

В равновесном состоянии выражение (20.3) для  $F_N$  совпадает с распределением Гиббса для системы  $N$  частиц.

Для решения конкретных проблем обобщенные кинетические уравнения пока еще не использовались.

## КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФЛУКТУАЦИЙ В ГАЗЕ

## § 21. Уравнение для сглаженных функций распределения в поляризационном приближении

Рассмотрим снова газ настолько разреженный, что можно ограничиться приближением парных столкновений. Напомним (см. введение), что при выводе кинетического уравнения Больцмана используется условие полного ослабления начальных корреляций. В действительности, как уже отмечалось на стр. 83, происходит ослабление мелкомасштабных корреляций с  $\tau_{\text{кор}} \sim \sim \sqrt{\epsilon} \tau_{\text{ст}}$ ,  $r_{\text{кор}} \sim \sqrt{\epsilon} l$ . Таким образом, при выводе кинетического уравнения Больцмана фактически предполагается, что крупномасштабные флуктуации (с  $\tau_{\text{кор}} \geq \sqrt{\epsilon} \tau_{\text{ст}}$ ,  $r_{\text{кор}} \geq \sqrt{\epsilon} l$ ) не играют роли в кинетической теории.

Лишь такой ценой можно получить кинетическое уравнение — замкнутое уравнение для функций распределения  $f_1$ .

Крупномасштабные флуктуации в общем случае не успевают затухнуть за время релаксации функции  $f_1$ . Вследствие этого из цепочки уравнений Боголюбова (или уравнения Лиувилля) при учете крупномасштабных флуктуаций не следует кинетическое уравнение Больцмана, а получается система уравнений для функции  $f_1$  и корреляционных функций крупномасштабных флуктуаций  $\tilde{g}_2, \dots$ . Эту систему уравнений можно заменить приближенно уравнением Ланжевена для случайной функции  $f_1$  — уравнением Больцмана со случайным источником  $y(x_1, t)$ . При этом естественно возникает задача определения статистических характеристик случайного источника. Для состояний газа, близких к равновесному состоянию, такая задача впервые была решена Кадомцевым [25]. В этой работе для расчета корреляционной функции случайного источника  $y$  использован метод, аналогичный тому, которым впервые было получено само кинетическое уравнение Больцмана.

В работе Горькова, Дзялошинского, Питаевского [38] для построения кинетической теории флуктуаций для равновесного со-



стояния газа использован метод Ландау, Лифшица [56, 59] и Рытова [57, 58].

Непосредственное обобщение работы Кадомцева [25] для неравновесных, но стационарных состояний газа проведено в работе Когана и Шульмана [39].

В работах Ганцевича, Гуревича, Катилюса [40, 41], Жигулева [43], Садовникова [44], Когана [45] теория равновесных и неравновесных, но стационарных флуктуаций в газе развита на основе приближенного решения цепочки уравнений для функций распределения  $f_1, f_2, \dots$  или соответствующих уравнений для функций Грина.

Здесь мы изложим результаты расчета флуктуаций в газе на основе цепочки уравнений для сглаженных функций распределения  $f_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3, \dots$  (см. § 18) и соответствующего этой цепочке уравнения для фазовой плотности  $\bar{N}(x, t)$  [23, 24].

Вернемся к уравнениям (18.11), (18.13) — первым двум уравнениям цепочки уравнений для сглаженных функций распределения  $f_1, \bar{f}_2, \dots$ .

Поскольку на малых расстояниях (порядка  $r_0$ ) основную роль играют корреляции за счет парных столкновений, то в выражении (18.15) можно пренебречь вкладом корреляционной функции  $\bar{g}_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_1(-\infty), \mathbf{r}_1, \mathbf{P}_2(-\infty))$  и для  $f_1$  использовать уравнение (18.16):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{F} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1}\right) f_1(x_1, t) = I(x_1, t) \equiv I_B + \bar{I}. \quad (21.1)$$

Здесь  $I_B$  — интеграл столкновений Больцмана; без учета временного запаздывания и пространственной неоднородности он определяется выражением (10.5), а в общем случае выражениями (15.5) — (15.8):

$$\bar{I} = n \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \bar{g}_2(x_1, x_2, t) dx_2 \quad (21.2)$$

— часть интеграла столкновений, определяемая крупномасштабными корреляциями.

В том же приближении вместо уравнения (18.13) для функции  $\bar{f}_2$  можно использовать уравнение (18.25) для корреляционной функции  $\bar{g}_2$ .

Мы уже отмечали, что в уравнении (18.25) последний член описывает вклад тройных и более сложных столкновений. В нем в свою очередь можно выделить «поляризационные» члены (см. § 3) (они определяются двухчастичными корреляционными функциями  $\bar{g}_2(2,3)$ ,  $\bar{g}_2(1,3)$ ) и члены, определяемые трехчастичной корреляционной функцией.

Здесь будет проведен расчет флуктуаций в газе в приближении двухчастичных корреляционных функций, поэтому

в уравнении (18.25) можно положить  $\tilde{g}_3 = 0$ . Кроме того, в силу малости крупномасштабных корреляционных функций в уравнении (18.25) можно пренебречь членом  $\hat{\theta}_{12}\tilde{g}_2$  по сравнению с  $\hat{\theta}_{12}f_1f_1$  в правой части уравнения. В результате получаем следующее уравнение для функции  $\tilde{g}_2$ :

$$\begin{aligned} (\hat{L}_{x_1x_2} + \delta\hat{L}_{x_1} + \delta\hat{L}_{x_2})\tilde{g}_2 = & \hat{\theta}_{12}f_1(\mathbf{p}_1, t)f_1(\mathbf{p}_2, t) - \\ & - \frac{1}{V} \int (\hat{\theta}_{13} + \hat{\theta}_{23})f_1(1)f_1(2)f_1(3) dx_3 + \overline{\hat{\theta}_{12}f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_1, t)f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_2, t)} - \\ & - \frac{1}{N} [I_B(x_1, t)f_1(x_2, t) + I_B(x_2, t)f_1(x_1, t)] + \\ & + n \int [\hat{\theta}_{13}\tilde{g}_2(2, 3)f_1(1) + \hat{\theta}_{23}\tilde{g}_2(1, 3)f_1(2)] dx_3. \quad (21.3) \end{aligned}$$

Это уравнение по структуре аналогично уравнению (3.5) для двухчастичной корреляционной функции  $g_2(x_1, x_2, t)$ , полученному в поляризационном приближении из цепочки уравнений для функций распределения  $f_1, f_2, f_3, \dots$

Отметим отличия уравнения (21.3) для функции  $\tilde{g}_2$ , полученного в поляризационном приближении из цепочки уравнений для сглаженных функций  $f_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3, \dots$

Основное отличие состоит в том, что в уравнении (21.3) в левой части содержатся дополнительные (по сравнению с (3.5)) члены  $\delta\hat{L}_{x_1}\tilde{g}_2, \delta\hat{L}_{x_2}\tilde{g}_2$ . Они описывают диссипативные и недиссипативные процессы, обусловленные парными столкновениями.

Поляризационные члены (последние члены в правых частях уравнений (21.3), (3.5)) имеют одинаковую структуру.

Первые четыре члена в правой части уравнения (21.3) определяются одночастичными функциями распределения  $f_1$ . Их можно рассматривать как источники в уравнениях для корреляционной функции  $\tilde{g}_2$ . Первый член источника соответствует источнику в уравнении (3.5). Второй член компенсирует первый при интегрировании по  $x_1$  или  $x_2$ .

Третий член в источнике имеет вид

$$\overline{\hat{\theta}_{12}f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_1(-\infty), t)f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{P}_2(-\infty), t)}. \quad (21.4)$$

Здесь восстановлен знак сглаживания — усреднение по физически бесконечно малому объему  $l_\phi^3 \sim (r_0/\sqrt{\epsilon})^3 \gg r_0^3$ .

В состоянии локального равновесия, когда  $f_1 = f_1^0$  — распределение Максвелла, выражение (21.4) обращается в нуль вследствие того, что подынтегральное выражение меняет знак при  $\mathbf{r}_{12} \rightarrow -\mathbf{r}_{12}$  и интеграл по  $\mathbf{r}_{12}$ , который возникает вследствие усреднения по объему  $l_\phi^3$ , равен поэтому нулю.

Четвертый член в источнике дополняет третий. Вместе с ним он дает нуль при интегрировании по  $x_1$  или  $x_2$ . При этом дают нулевой вклад и первые два члена. В результате уравнение для функции  $\int \tilde{g}_2 dx_2/V$  становится однородным и имеет решение

$$\int \tilde{g}_2 dx_2/V = 0. \quad (21.5)$$

Необходимость выполнения этого условия следует из определения корреляционной функции  $\tilde{g}_2$  (18.14).

## § 22. Уравнение для сглаженной фазовой плотности. Метод моментов

В §§ 4—6 в основу построения статистической теории неравновесных процессов в газе было положено уравнение (4.6) для фазовой плотности в шестимерном пространстве координат и импульсов. Усредняя это уравнение, мы получили цепочку уравнений для моментов фазовой плотности, эквивалентную цепочке уравнений для функций распределения  $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3, \dots$

В частности, в § 6 было получено уравнение для второго одно-временного момента флуктуаций фазовой плотности  $(\delta N \delta N)_{x, x', t}$  (уравнение (6.13)), которое эквивалентно уравнению (3.5) для двухчастичной корреляционной функции  $g_2$  в поляризованном приближении. Было также показано, что для описания процессов в поляризованном приближении можно в качестве исходного использовать уравнение (6.32) для флуктуаций фазовой плотности  $\delta N$ . Это уравнение содержит источник  $\delta N^{\text{ист}}$ . Корреляция флуктуаций источника определяется уравнением (6.33).

Аналогичное рассмотрение возможно и при исследовании крупномасштабных флуктуаций в газе. Для этого вместо уравнения (4.6) для фазовой плотности  $N(x, t)$  в качестве исходного используем уравнение для сглаженной фазовой плотности  $\tilde{N}(x, t)$ , из которого усреднением можно получить цепочку уравнений для моментов, эквивалентную цепочке уравнений для сглаженных функций распределения  $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3, \dots$

Запишем уравнение для функции  $\tilde{N}(x, t)$  в виде, аналогичном уравнению (4.7):

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \tilde{N}(x, t) = \\ & = \int \hat{\theta}_{xx'} [\tilde{N}(x, t) \tilde{N}(x', t) + \tilde{N}(\mathbf{r}, \mathbf{P}(-\infty), t) \tilde{N}(\mathbf{r}, \mathbf{P}'(-\infty), t)] dx'. \end{aligned} \quad (22.1)$$

Здесь

$$\hat{\theta}_{xx'} = \frac{\partial \Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial \mathbf{r}'} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} \quad (22.2)$$

— оператор, аналогичный оператору  $\hat{\theta}_{ij}$  (1.6).

Последний член в (22.1), учитывающий вклад парных столкновений в уравнение для сглаженной фазовой плотности  $\tilde{N}(x, t)$ , записан в приближении идеального газа. С учетом временного запаздывания и пространственной неоднородности в первом приближении по  $\tau_0/\tau_{ст}$ ,  $r_0/l$  последний член в уравнении (22.1) следует записать в виде

$$\begin{aligned} & \int \hat{\theta}_{xx'} \left\{ \left( 1 - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) [\tilde{N}(\mathbf{r}, \mathbf{P}(-\infty), t) N(\mathbf{r}, \mathbf{P}'(-\infty), t) - \right. \\ & \left. - \tilde{N}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \tilde{N}(\mathbf{r}, \mathbf{p}', t)] - \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{v} + \mathbf{v}'}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{F}_0' \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} \right) \times \right. \\ & \left. \times \int_0^\infty \tau \frac{d}{d\tau} \tilde{N}(\mathbf{r}, \mathbf{P}(-\tau), t) \tilde{N}(\mathbf{r}, \mathbf{P}'(-\tau), t) d\tau \right\} dx'. \quad (22.3) \end{aligned}$$

Это выражение записано по аналогии с (15.6)—(15.8).

Уравнение (22.1) для фазовой плотности  $\tilde{N}$  при  $\mathbf{F}_0 = 0$  и без учета первого члена правой части впервые использовалось в работе Кадомцева для расчета флуктуаций в идеальном газе [25]\*).

Уравнение для сглаженной фазовой плотности может быть получено из точного уравнения (4.6) для фазовой плотности  $N(x, t)$  тем же путем, который был использован в § 18 при получении уравнения (18.10) для сглаженной функции распределения  $\tilde{f}_N$  из уравнения Лиувилля для функции распределения  $f_N(x_1, \dots, x_N, t)$ . Проведем усреднение уравнения (22.1). В дальнейшем там, где это не приведет к недоразумениям, будем опускать знак  $\sim$  над функцией  $N(x, t)$ , т. е.  $\tilde{N}(x, t) \rightarrow N(x, t)$ .

Для сглаженных функций имеют место равенства, аналогичные равенствам (5.1), (5.2), (5.6):

$$\overline{\tilde{N}}(x, t) = n f_1(x, t), \quad (22.4)$$

$$\overline{\tilde{N}(x, t) \tilde{N}(x', t)} = \frac{N(N-1)}{V^2} \tilde{f}_2(x, x', t) + \frac{N}{V} \delta(x-x') f_1(x, t), \quad (22.5)$$

$$\begin{aligned} \overline{(\delta N \delta N)_{x, x', t}} &= \frac{N(N-1)}{V^2} \tilde{g}_2(x, x', t) + \\ &+ \frac{N}{V} \left[ \delta(x-x') f_1(x, t) - \frac{1}{V} f_1(x, t) f_1(x', t) \right]. \quad (22.6) \end{aligned}$$

\*) В недавнем препринте Н. Н. Боголюбова [66] рассматривается уравнение для микроскопической фазовой плотности, соответствующее уравнению Больцмана — Энского (см. стр. 72).

Здесь

$$\delta N(x, t) = \tilde{N}(x, t) - \bar{N}(x, t) \quad (22.7)$$

— флуктуация сглаженной фазовой плотности.

Уравнение для средней фазовой плотности  $\bar{N}$  соответствует (учитывая равенства (22.4), (22.5)) уравнению (18.11) — первому уравнению цепочки уравнений для сглаженных функций  $f_1, \bar{f}_2, \dots$ . Если пренебречь вкладом корреляционной функции  $\tilde{g}_2$  на расстояниях порядка  $r_0$ , как это сделано при переходе от уравнения (18.11) к уравнению (18.16), то получим следующее уравнение:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} + F \frac{\partial}{\partial p} \right) f_1(x, t) = I_B(x, t) + \tilde{I}(x, t). \quad (22.8)$$

Это уравнение отличается от уравнения (18.16) лишь тем, что  $\tilde{I}$  — часть интеграла столкновений, учитывающая вклад крупномасштабных флуктуаций, определяется (вместо (18.17)) выражением

$$\tilde{I}(x, t) = \frac{1}{n} \int \hat{\theta}_{xx'} \overline{(\delta N \delta N)}_{x, x', t} dx' \equiv \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial p} \overline{(\delta F \delta N)}_{r, x, t}. \quad (22.9)$$

Как и в (18.16),  $I_B$  — интеграл столкновений Больцмана. Без учета временного запаздывания и пространственной неоднородности он определяется выражением (10.5), а в общем случае выражениями (15.5) — (15.8).

Из формулы (22.6), которая определяет связь функций  $\overline{(\delta N \delta N)}_{x, x', t}$ ,  $\tilde{g}_2$ , следует, что в выражении (22.9) по сравнению с (18.17) есть два дополнительных члена. Один из них (второй член в правой части (22.6)) учитывает самовоздействие. Он выпадает при интегрировании по  $r'$  в интеграле  $I$ . Второй (определяемый последним членом в (22.6)) учитывает то, что в выражении для средней силы (см. (2.10)) вместо множителя  $(N-1)/V$  стоит  $N/V$ . Эта разница и компенсируется этим членом.

Выражение (22.6), как и соответствующее выражение (5.6), удовлетворяет условиям

$$\frac{1}{V} \int \overline{(\delta N \delta N)}_{x, x', t} dx' = \frac{1}{V} \int \overline{(\delta N \delta N)}_{x, x', t} dx = 0, \quad (22.10)$$

которые являются следствием постоянства полного числа частиц.

Используя уравнение (22.1), запишем второе уравнение цепочки уравнений для моментов сглаженной фазовой плотности  $\bar{N}$ . Оно имеет вид (знак  $\sim$  над  $N$  опускаем)

$$L_{xx'}^0 \overline{(NN)}_{x, x', t} = \int \left\{ \hat{\theta}_{xx''} \left[ \overline{(NNN)}_{x, x', x'', t} + \overline{(NNN)}_{p, x', p'', t} \right] + \right. \\ \left. + \hat{\theta}_{x'x''} \left[ \overline{(NNN)}_{x, x', x'', t} + \overline{(NNN)}_{x, p', p'', t} \right] \right\} dx''. \quad (22.11)$$

Это уравнение соответствует уравнению (18.13) для двухчастичной сглаженной функции  $\tilde{f}_2$ .

Покажем, как можно перейти от уравнения (22.11) к уравнению (18.13). Такой переход позволит установить правила действия оператора столкновений на члены, содержащие сингулярные функции. Такие функции появляются в выражениях, связывающих моменты фазовой плотности с функциями распределения, например в выражении (22.5).

Запишем соответствующее выражение для третьего момента:

$$\begin{aligned} \overline{(NNN)}_{x, x', x'', t} &= \frac{N(N-1)(N-2)}{V^3} \tilde{f}_3(x, x', x'', t) + \\ &+ \frac{N(N-1)}{V^2} [\delta(x-x') \tilde{f}_2(x', x'', t) + \delta(x'-x'') \tilde{f}_2(x'', x, t) + \\ &+ \delta(x''-x) \tilde{f}_2(x, x', t)] + \frac{N}{V} \delta(x-x') \delta(x'-x'') f_1(x'', t). \end{aligned} \quad (22.12)$$

Подставим сначала это выражение в первые члены, стоящие в квадратных скобках в правой части уравнения (22.11). Опустим члены, описывающие самовоздействие, выполним интегрирование по  $x''$  в членах, содержащих функции  $\delta(x-x'')$ ,  $\delta(x'-x'')$ , и учтем, что под интегралом в (22.11)

$$(\hat{\theta}_{xx''} + \hat{\theta}_{x'x''}) \delta(x-x') \dots = \delta(x-x') (\hat{\theta}_{xx''} + \hat{\theta}_{x'x''}) \dots \quad (22.13)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \int [\hat{\theta}_{xx''} \overline{(NNN)}_{x, x', x'', t} + \hat{\theta}_{x'x''} \overline{(NNN)}_{x, x', x'', t}] dx'' &= \\ &= \frac{N(N-1)(N-2)}{V^3} \int (\hat{\theta}_{xx''} + \hat{\theta}_{x'x''}) \tilde{f}_3(x, x', x'', t) dx'' + \\ &+ \frac{N(N-1)}{V^2} \left\{ \frac{1}{2} \delta(x-x') \int [\hat{\theta}_{xx''} \tilde{f}_2(x, x'', t) + \right. \\ &\left. + \hat{\theta}_{x'x''} \tilde{f}_2(x', x'', t)] dx'' + \hat{\theta}_{xx''} \tilde{f}_2(x, x', t) \right\}. \end{aligned} \quad (22.14)$$

Множитель  $1/2$  перед  $\delta(x-x')$  возник вследствие симметризации выражения, стоящего в (22.14) под интегралом в квадратных скобках относительно  $x, x'$ .

Рассмотрим теперь оставшиеся два члена в (22.11). Они отличаются от рассмотренных двух членов тем, что в них соответственно

$$x, x'' \rightarrow r, P, r, P'', \quad x', x'' \rightarrow r', P', r', P''. \quad (22.15)$$

Естественно, что такая замена должна производиться лишь в аргументах функций распределения, определяющих вероятность координат и импульсов взаимодействующих частиц. По-

этому после подстановки в (22.11) выражения (22.12) замена (22.15) в аргументах дельта-функций не производится. Учитывая это, найдем, что

$$\begin{aligned} & \int [\hat{\theta}_{xx''}(\overline{N\overline{N\overline{N\overline{N}}})_{P, x', P'', t} + \hat{\theta}_{x'x''}(\overline{N\overline{N\overline{N\overline{N}}})_{x, P', P'', t}] dx'' = \\ & = \frac{N(N-1)(N-2)}{V^3} \int [\hat{\theta}_{xx''} \hat{f}_3(\mathbf{P}, x', \mathbf{P}'', t) + \hat{\theta}_{x'x''} \tilde{f}_3(x, \mathbf{P}', \mathbf{P}'', t)] dx'' + \\ & + \frac{N(N-1)}{V^2} \left\{ \frac{1}{2} \delta(x-x') \int [\hat{\theta}_{xx'} \tilde{f}_2(\mathbf{P}, \mathbf{P}'', t) + \right. \\ & \left. + \hat{\theta}_{x'x''} \tilde{f}_2(\mathbf{P}', \mathbf{P}'', t)] dx'' + \hat{\theta}_{xx'} \tilde{f}_2(\mathbf{P}, \mathbf{P}', t) \right\}. \quad (22.16) \end{aligned}$$

Преобразуем теперь левую часть уравнения (22.11). Подставим в левую часть выражение (22.5). Рассмотрим вклад второго члена из (22.5).

Производя симметризацию и используя первое уравнение цепочки уравнений для сглаженных функций  $f_1, \tilde{f}_2, \dots$ , т. е. уравнение (22.8), получим

$$\begin{aligned} & \hat{L}_{xx'}^0 \frac{n}{2} \delta(x-x') (f_1(x, t) + f_1(x', t)) = \\ & = \frac{n}{2} \delta(x-x') (\hat{L}_x^0 f_1(x, t) + \hat{L}_{x'}^0 f_1(x', t)) = \\ & = \frac{1}{2} \frac{N(N-1)}{V^2} \delta(x-x') \int [\hat{\theta}_{xx''} (\tilde{f}_2(x, x'', t) + \tilde{f}_2(\mathbf{P}, \mathbf{P}'', t)) + \\ & + \hat{\theta}_{x'x''} (\tilde{f}_2(x', x'', t) + \tilde{f}_2(\mathbf{P}', \mathbf{P}'', t))] dx''. \quad (22.17) \end{aligned}$$

С учетом (22.14), (22.16), (22.17) из уравнения (22.11) находим уравнение для функции  $\tilde{f}_2$ , совпадающее с уравнением (18.13), т. е. второе уравнение цепочки уравнений для сглаженных функций распределения  $f_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3, \dots$ . Описанная процедура может быть проведена и для следующих уравнений цепочки.

Таким образом, цепочка уравнений для моментов сглаженной фазовой плотности  $\tilde{N}(x, t)$ , удовлетворяющей уравнению (22.1), эквивалентна цепочке уравнений для функций распределения  $f_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3, \dots$ , которая следует из уравнения Лиувилля для сглаженной функции распределения  $\tilde{f}_N$ . Отметим еще раз, что при доказательстве эквивалентности в цепочке уравнений для моментов замена (22.15) производилась лишь в аргументах функций распределения.

Из доказанной эквивалентности следует, что в поляризационном приближении из цепочки уравнений для моментов функции  $\tilde{N}(x, t)$  следует уравнение, совпадающее с уравнением (21.3). Запишем это уравнение в иной форме, которая более удобна

в методе моментов. Используя равенство (22.6), можно в правой части уравнения (21.3) объединить последний член правой части с первыми двумя членами правой части. В результате уравнение (21.3) примет вид  $(x_1, x_2, x_3 \rightarrow x_1, x', x'')$

$$\begin{aligned} & (\hat{L}_{xx'} + \delta\hat{I}_x + \delta\hat{I}_{x'}) \tilde{g}_2(x, x', t) = \\ & = \frac{1}{n} \int [\hat{\theta}_{xx''} \overline{(\delta N \delta N)}_{x', x'', t} f_1(x, t) + \hat{\theta}_{x'x''} \overline{(\delta N \delta N)}_{x, x'', t} f(x', t)] dx'' + \\ & + \overline{\hat{\theta}_{xx'} f_1(\mathbf{P}, t) f_1(\mathbf{P}', t)} - \frac{1}{N} [I_B(x, t) f_1(x', t) + I_B(x', t) f_1(x, t)]. \end{aligned} \quad (22.18)$$

Продолжим преобразование этого уравнения. Умножим уравнение (22.18) на  $n^2$ , прибавим к левой и правой части выражение

$$(\hat{L}_{xx'} + \delta\hat{I}_x + \delta\hat{I}_{x'}) n \left( \delta(x - x') f_1 - \frac{1}{V} f_1(x, t) f_1(x', t) \right) \quad (22.19)$$

и используем равенство (22.6) и связь флуктуаций  $\delta\mathbf{F}$ ,  $\delta N$ :

$$\delta\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int \Phi_{rr'} \delta N(x', t) dx'. \quad (22.20)$$

В результате получим уравнение для второго момента  $\overline{(\delta N \delta N)}_{x, x', t}$ . Запишем его в виде

$$\begin{aligned} & (\hat{L}_{xx'} + \delta\hat{I}_x + \delta\hat{I}_{x'}) \overline{(\delta N \delta N)}_{x, x', t} + \overline{(\delta\mathbf{F} \delta N)}_{r, x', t} \frac{\partial n^2_1(x, t)}{\partial \mathbf{p}} + \\ & + \overline{(\delta N \delta \mathbf{F})}_{x, r', t} \frac{\partial n^2_1(x', t)}{\partial \mathbf{p}'} = A(x, x', t). \end{aligned} \quad (22.21)$$

Здесь введено обозначение

$$\begin{aligned} A(x, x', t) = & (\hat{L}_{xx'} + \delta\hat{I}_x + \delta\hat{I}_{x'}) n \left( \delta(x - x') f_1 - \frac{1}{V} f_1(x, t) f_1(x', t) \right) + \\ & + \overline{n^2 \hat{\theta}_{xx'} f_1(\mathbf{P}, t) f_1(\mathbf{P}', t)} - \frac{n}{V} [I_B(x, t) f_1(x', t) + I_B(x', t) f_1(x, t)]. \end{aligned} \quad (22.22)$$

Функция  $A$  определяется одночастичными функциями распределения и поэтому может рассматриваться как источник в уравнении для вторых моментов. В этом отношении имеется аналогия с уравнением (6.13).

Преобразуем выражение (22.22) для функции  $A$ . Предполагая, как и выше, что при действии операторов  $\delta\hat{I}_x$ ,  $\delta\hat{I}_{x'}$  замена (22.15) производится лишь в аргументах функций распределения, и используя уравнение (22.8) для  $f_1$ , получим следующее



выражение:

$$A(x, x', t) \equiv \tilde{A} = n \left\{ \delta(x - x') \tilde{I}(x, t) - \frac{1}{V} [\tilde{I}(x, t) f_1(x', t) + \tilde{I}(x', t) f_1(x, t)] \right\}. \quad (22.23)$$

Из этого выражения следует, что функция  $A$  обладает свойствами

$$\int A(x, x', t) dx' = 0, \quad \int A(x, x', t) dx = 0. \quad (22.24)$$

Заметим, что к виду (22.23) можно привести и правую часть уравнения (6.13). Действительно, используя уравнение (6.2) для функции  $f_1$ , получим

$$\hat{L}_{xx'} \overline{(\delta N \delta N)}_{x, x', t}^{\text{ист}} = n \left\{ \delta(x - x') I(x, t) - \frac{1}{V} [I(x, t) f_1(x', t) + I(x', t) f_1(x, t)] \right\}. \quad (22.25)$$

Мы видим, что источник в (22.23) выражается через  $I$  — часть интеграла столкновений, которая определяется крупномасштабными флуктуациями. Этот результат является естественным, так как при  $\tilde{I} = 0$ , когда крупномасштабные флуктуации не учитываются, уравнение Больцмана в рассматриваемом выше приближении (см. § 10) дает исчерпывающее описание кинетических процессов в газах в приближении парных столкновений.

Уравнения (22.8), (22.18) для функций  $f_1, \tilde{g}_2$  составляют замкнутую систему уравнений, на основе которой можно произвести описание неравновесных процессов в газе с учетом крупномасштабных флуктуаций. Вместо (22.18), (22.8) можно использовать систему уравнений (22.8), (22.21) для функций  $f_1, \overline{(\delta N \delta N)}_{x, x', t}$ .

Из системы уравнений для функций  $f_1, \tilde{g}_2$  (или  $f_1, \overline{(\delta N \delta N)}_{x, x', t}$ ) нельзя получить замкнутое уравнение для функции  $f_1$  — кинетическое уравнение, если не делать дальнейших упрощающих предположений. Переход к кинетическому уравнению возможен, если функция  $f_1(x, t)$  мало меняется на расстоянии  $l$  и за время свободного пробега  $\tau_{\text{ст}}$ . При этом условии, как и при выводе кинетического уравнения Больцмана, можно, используя условие ослабления начальных корреляций, выразить функцию корреляции  $\tilde{g}_2$  через функцию  $f_1$  и тем самым получить явное выражение для интеграла столкновений в уравнении (22.8). Это будет сделано в гл. 11, посвященной кинетической теории флуктуаций в плазме.

Мы можем снять еще одно ограничение (ограничение 4 на стр. 80), которое было сделано при выводе кинетического уравнения Больцмана. Оно состоит в том, что процесс столкновений какого-либо атома из физически бесконечно малого объема можно рассматривать как непрерывный процесс. В действительности процесс столкновений является дискретным (дробовой эффект).

При учете дискретности процесса столкновений в правой части уравнения (22.21) появится дополнительный вклад в источник  $A(x, x', t)$ . Его можно будет представить в виде

$$A(x, x', t) = \tilde{A}(x, x', t) + A^B(x, x', t). \quad (22.26)$$

Функция  $\tilde{A}$  определяется интегралом столкновений  $\tilde{I}$  (см. (22.23)). Второй член в (22.26) отличен от нуля и при  $I = 0$ . Он определяется, как мы увидим, теми же процессами, что и интеграл столкновений Больцмана  $I_B$ . Вследствие этого и поставлен индекс B в функции  $A^B$ .

Чтобы учесть дробовой эффект, т. е. дискретность процесса столкновений, надо в функции (22.22) при раскрытии действия операторов производить замену (22.15) во всех аргументах функций под знаком оператора столкновений\*). При этом вместо (22.23) получим выражение (22.26), в котором

$$A^B_{(x, x', t)} = n^2 \int \{ \hat{\partial}_{xx''} [\delta(r' - r)(\delta(p' - p) - \delta(p' - P)) + \\ + \delta(r' - r'')(\delta(p' - p'') - \delta(p' - P''))] f_1(P, t) f_1(P'', t) + \\ + r, p \rightleftharpoons r', p' \} dx''. \quad (22.27)$$

Отсюда видно, что  $A^B = 0$ , если замена (22.15) производится только в аргументах функций распределения. Функция  $A^B$  обладает свойствами (22.24).

В равновесном состоянии функция  $\tilde{A} = 0$ , так как в этом случае равен нулю интеграл столкновений  $\tilde{I}$ , определяющий функцию  $\tilde{A}$  (см. (22.23)). Функция  $A^B$  отлична от нуля и в равновесном состоянии, так как флуктуации, обусловленные дискретностью процесса столкновений, существуют и в равновесном состоянии. При этом выражение (22.27) упрощается (в нем исчезают члены, содержащие функции  $\delta(p' - p)$ ,  $\delta(p' - p'')$ ,  $\delta(p - p'')$ ) и принимает вид

$$A^B = -n^2 \int \{ \hat{\partial}_{xx''} [\delta(r' - r) \delta(p' - P) + \\ + \delta(r' - r'') \delta(p' - P'')] f_1(P) f_1(P'') + r, p \rightleftharpoons r', p' \} dx''. \quad (22.28)$$

\*) Тем самым допускаются изменения функций  $f_1$  на масштабах  $\sim l_\phi$ , т. е. на «ширине»  $\delta$ -функций.

В дальнейшем будет удобна другая форма записи выражения (22.27) для  $A^B$ . Она следует из (22.27)<sub>1</sub>, если выполнить интегрирование по  $r''$ ,  $p''$  в членах, содержащих функции  $\delta(r' - r'') \times \delta(p' - p'')$ ,  $\delta(r - r'') \delta(p - p'')$ , и вынести функции  $\delta(r' - r) \times \delta(p' - p)$ ,  $\delta(r - r') \delta(p - p')$  из-под знаков операторов  $\hat{\theta}_{xx''}$ ,  $\hat{\theta}_{x'x''}$ . В результате получим выражение, которое удобно записать в виде

$$A^B(x, x', t) = n\delta(x - x') I_B(x, t) + nI_{xx'} - \\ - n^2 \int \{ \hat{\theta}_{xx''} [\delta(r' - r) \delta(p' - P) + \delta(r' - r'') \delta(p' - P'')] \times \\ \times f_1(P, t) f_1(P'', t) + r, p \rightleftharpoons r', p' \} dx''. \quad (22.27)_2$$

Здесь  $I_B(x, t)$  — интеграл столкновений Больцмана, а

$$I_{xx'} = n \overline{\hat{\theta}_{xx'} f_1(P, t) f_1(P', t)}. \quad (22.29)$$

Из этого выражения следует, что

$$\int I_{xx'} dx' = I_B(x, t), \quad \int I_{xx'} dx = I_B(x', t).$$

В равновесном состоянии первые два члена в (22.27)<sub>2</sub> обращаются в нуль, и мы снова получаем выражение (22.28).

Таким образом, в равновесном состоянии  $\dot{A} = 0$ , но  $A^B \neq 0$ . Такое неравновесие вполне естественно. Оно обусловлено тем, что в цепочке уравнений для сглаженных функций распределения или соответствующей цепочке уравнений для моментов, в частности в уравнениях (22.18), (22.21), диссипация обусловлена лишь мелкомасштабными флуктуациями, которые определяют интеграл столкновений Больцмана. Эти уравнения определяют статистические характеристики крупномасштабных флуктуаций. Спектральные плотности этих флуктуаций будут рассчитаны в следующем параграфе. Мы увидим, что через них можно выразить интеграл столкновений  $\tilde{I}$ , если характерные масштабы  $T, L$  для функции  $f_1$  много больше  $\tau_{ст}, l$ , т. е.  $T \gg \tau_{ст}, L \gg l$ .

Это имеет место, например, при переходе к газодинамическому описанию. Естественно, что в уравнениях газовой динамики будет учитываться уже диссипация, обусловленная как мелкомасштабными, так и крупномасштабными флуктуациями. Иными словами, диссипативные вклады будут определяться не только больцмановским интегралом столкновений  $I_B$ , но и интегралом столкновений  $\tilde{I}$ .

Для расчета пространственно-временных плотностей крупномасштабных флуктуаций нужно использовать уравнения для двухвременных моментов или соответствующих корреляционных функций. Уравнение для функции  $\tilde{g}_2(x, t, x', t')$  в поляризацон-

ном приближении может быть получено по аналогии с тем, как было получено уравнение (22.18) для одновременной функции  $\bar{g}_2(x, x', t)$ . Оно имеет вид

$$\begin{aligned} (\hat{L}_x + \delta\hat{I}_x) \bar{g}_2(x, t, x', t') = \\ = \frac{1}{n} \int \hat{\theta}_{xx'} \overline{(\delta N \delta N)}_{x', t, x', t'} f_1(x, t) dx'' + \\ + \int \hat{\theta}_{xx''} f_1(r, P, t) F_1(x', t', r, P', t) dx'' - \frac{1}{N} I_B(x, t) f_1(x', t'). \end{aligned} \quad (22.30)$$

Из этого уравнения можно получить уравнение (22.18) для одновременной корреляционной функции  $\bar{g}_2(x, x', t)$ . Для этого надо записать второе уравнение (22.30) для функции  $\bar{g}_2(x', t, x, t')$ , сложить оба уравнения и произвести предельный переход  $t' \rightarrow t$ . Предельный переход во втором члене правой части уравнения (22.30) выполняется следующим образом. Вводим запаздывание и неоднородность, а в конце  $\tau = 0$ ,  $r_3 = r$ , т. е.

$$\begin{aligned} \lim_{t' \rightarrow t} \int \hat{\theta}_{13} f_1(r_1, P_1, t) F_1(x_2, t' - \tau, r_3, P_3, t - \tau) dx_3 = \\ = \int \hat{\theta}_{13} f_1(r_1, P_1, t) \delta(r_2 - r_3) \delta(P_2 - P_3) f_1(r_3, P_3, t - \tau) dr_3 dp_3 \Big|_{\substack{r_2=r_1 \\ \tau=0}} = \\ = \hat{\theta}_{12} f_1(r_1, P_1, t) f_1(r_1, P_2, t). \end{aligned} \quad (22.31)$$

Запишем уравнение для двухвременного момента. Для этого используем равенство

$$\begin{aligned} \overline{(\delta N \delta N)}_{x, t, x', t'} = \frac{N(N-1)}{V^2} \bar{g}_2(x, t, x', t') + \\ + n \left( F_1(x, t, x', t') - \frac{1}{V} f_1(x, t) f_1(x', t') \right), \end{aligned} \quad (22.32)$$

которое при  $t' = t$  совпадает с равенством (22.6).

Умножим уравнение (22.30) на  $N(N-1)/V^2$  и прибавим к левой и правой частям этого уравнения выражение

$$(\hat{L}_x + \delta\hat{I}_x) n \left( F_1(x, t, x', t') - \frac{1}{V} f_1(x, t) f_1(x', t') \right). \quad (22.33)$$

В результате получим уравнение для двухвременного момента. Запишем его в виде

$$\begin{aligned} \overline{(\hat{L}_x + \delta\hat{I}_x) (\delta N \delta N)}_{x, t, x', t'} + \overline{(\delta F \delta N)}_{r, t, x', t'} \frac{\partial n^i_1(x, t)}{\partial p} = \\ = A(x, t, x', t'). \end{aligned} \quad (22.34)$$

Здесь введено обозначение для двухвременного источника

$$A(x, t, x', t') = (\hat{L}_x + \delta\hat{I}_x) n \left( F_1(x, t, x', t') - \frac{1}{V} f_1(x, t) f_1(x', t') \right) + \\ + n^2 \int \hat{\theta}_{xx''} f_1(\mathbf{r}, \mathbf{P}, t) F_1(x', t', \mathbf{r}, \mathbf{P}'', t) dx'' - \\ - \frac{n}{V} I_B(x, t) f_1(x', t'). \quad (22.35)$$

Уравнение (22.34) соответствует уравнению (22.21). Преобразуем выражение (22.35) для источника  $A(x, t, x', t')$ . Для этого используем уравнение для функции  $F_1(x, t, x', t')$ :

$$\hat{L}_x F_1 = \frac{N-1}{V} \int \hat{\theta}_{xx''} [\tilde{g}_2(x, t, x', t'; x'', t) + \\ + F_1(\mathbf{r}, \mathbf{P}, t, x', t') f_1(\mathbf{r}, \mathbf{P}'', t)] dx''. \quad (22.36)$$

Это уравнение следует непосредственно из уравнения Лиувилля для двухвременной сглаженной функции распределения (§ 18) или из соответствующего уравнения для фазовой плотности  $\tilde{N}(x, t, x', t')$ . Оно отличается от уравнения (22.1) лишь заменой  $\tilde{N}(x, t) \rightarrow \tilde{N}(x, t, x', t')$ .

Запишем в явном виде выражение для  $\delta\hat{I}_x F_1$  в (22.35):

$$\delta\hat{I}_x F_1(x, t, x', t') = - \frac{N-1}{V} \int \hat{\theta}_{xx''} [F_1(\mathbf{r}, \mathbf{P}, t, x', t') f_1(\mathbf{r}, \mathbf{P}'', t) + \\ + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{P}, t) F_1(\mathbf{r}, \mathbf{P}'', t, x', t')] dx''. \quad (22.37)$$

Используя это выражение и уравнение (22.36), а также кинетическое уравнение для  $f_1$ , получим следующее выражение для функции  $A(x, t, x', t')$ :

$$A(x, t, x', t') = n^2 \int \hat{\theta}_{xx''} [\tilde{g}_2(x, t, x', t'; x'', t) - \\ - \frac{1}{V} \tilde{g}_2(x, x'', t) f_1(x', t')] dx''. \quad (22.38)$$

Отсюда видно, что источник  $A$  обладает свойствами

$$\int A(x, t, x', t') dx = \int A(x, t, x', t') dx' = 0,$$

аналогичными свойствам (22.24).

Из выражения (22.38) следует, что источник  $A(x, t, x', t')$  порядка  $n\tilde{I} \sim nF_1/\tilde{\tau}_{ст}$ , поэтому в уравнении (22.34) есть два времени релаксации  $\tau_{ст}$ ,  $\tilde{\tau}_{ст}$ . При  $\tau_{ст} \ll \tilde{\tau}_{ст}$  правой частью в (22.34) можно пренебречь.

Таким образом, в приближении  $\tau_{ст} \ll \tilde{\tau}_{ст}$

$$A(x, t, x', t') = 0 \quad (22.39)$$

и, следовательно, уравнение (22.34) является однородным, т. е.

$$(\hat{L}_x + \delta\hat{I}_x) \overline{(\delta N \delta N)}_{x, t, x', t'} + \overline{(\delta F \delta N)}_{r, t, x', t'} \frac{\partial n_{i_1}^i(x, t)}{\partial p} = 0. \quad (22.40)$$

Мы пришли к ситуации, подобной той, которая возникла при описании в поляризованном приближении мелкомасштабных корреляций. Отличие уравнений (22.21), (22.40) от соответствующих уравнений (6.13), (6.31) состоит лишь в том, что теперь

$$\hat{L}_{xx'} \rightarrow \hat{L}_{xx'} + \delta\hat{I}_x + \delta I_{x'}, \quad \hat{L}_x \rightarrow \hat{L}_x + \delta\hat{I}_x,$$

и тем самым в уравнениях (22.21), (22.40) учитывается затухание, обусловленное мелкомасштабными флуктуациями, которые определяют интеграл столкновений Больцмана \*).

Как и в § 6, для определения двухвременной функции  $\overline{(\delta N \delta N)}_{x, t, x', t'}$  надо знать решение уравнения (22.21) для одновременной корреляции флуктуаций  $\delta N$ . Этого можно избежать, если в качестве исходного для определения корреляций использовать уравнение для  $\delta N$ , которое эквивалентно системе уравнений (22.21), (22.40). Оно имеет вид

$$(\hat{L}_x + \delta\hat{I}_x) (\delta N(x, t) - \delta N^{\text{ист}}(x, t)) + \delta F(r, t) \frac{\partial n_{i_1}^i(x, t)}{\partial p} = 0. \quad (22.41)$$

Корреляция флуктуаций источника определяется уравнением

$$(\hat{L}_x + \delta\hat{I}_x) \overline{(\delta N \delta N)}_{x, t, x', t'}^{\text{ист}} = 0, \quad (22.42)$$

которое следует решать при начальном условии

$$\overline{(\delta N \delta N)}_{x, t, x', t'}^{\text{ист}} \Big|_{t=t'} = (\hat{L}_{xx'} + \delta\hat{I}_x + \delta I_{x'})^{-1} A(x, x', t). \quad (22.43)$$

Здесь  $(\dots)^{-1}$  — обратный оператор. Функция  $A$  определяется выражениями (22.22), (22.26), (22.23), (22.27)<sub>1</sub>.

Если вклад крупномасштабных флуктуаций не учитывается, то в этом приближении в уравнении (2.41) можно опустить последний член, а в выражении (22.26) для  $A$  положить  $\bar{A} = 0$ . Тогда из (22.41) следует, что  $\delta N = \delta N^{\text{ист}}$ , и поэтому уравнение для функции  $\overline{(\delta N \delta N)}_{x, t, x', t'}$  совпадает с (22.42)

$$(\hat{L}_x + \delta\hat{I}_x) \overline{(\delta N \delta N)}_{x, t, x', t'} = 0. \quad (22.44)$$

Уравнение (22.44) следует, естественно, и из уравнения (22.40). Уравнение (22.21) в этом приближении принимает вид

$$(\hat{L}_{xx'} + \delta\hat{I}_x + \delta I_{x'}) \overline{(\delta N \delta N)}_{x, x', t} = A(x, x', t). \quad (22.45)$$

\*) Уравнение (22.40) соответствует гипотезе Онзагера о временной эволюции крупномасштабных флуктуаций (ср. с примечанием на стр. 37).

Систему уравнений (22.44), (22.45) можно заменить эквивалентным уравнением Ланжевена

$$(\hat{L}_x + \delta \hat{I}_x) \delta N(x, t) = y(x, t), \quad (22.46)$$

которое представляет собой линеаризованное уравнение Больцмана со случайным источником  $y(x, t)$ . Такое уравнение впервые рассматривалось Кадомцевым [25]. Им было получено выражение для спектральной плотности случайного источника равновесного состояния.

### § 23. Случайные источники в кинетическом уравнении Больцмана и в уравнениях газовой динамики

Найдем выражение для спектральной плотности источника флуктуаций в линеаризованном кинетическом уравнении Больцмана. Будем предполагать, что газ пространственно однороден и  $\hat{I} = 0$ . Тогда уравнение (22.8) примет вид

$$\frac{\partial \dot{f}_1}{\partial t} + F_0 \frac{\partial \dot{f}_1}{\partial p} = I_B(p, t). \quad (23.1)$$

Здесь  $F_0$  — внешняя сила.

Используя уравнение (22.45), запишем уравнения для пространственной спектральной плотности  $(\delta N \delta N)_{k, p, p', t}$ , предполагая, что функция распределения  $f_1$  мало меняется за время  $\tau_{ст}$  — характерное время крупномасштабных флуктуаций. В нулевом приближении по  $\tau_{ст} \partial / \partial t$  из (22.45) следует уравнение

$$(ik(v - v') + \hat{f}_p + \hat{f}_{p'}) (\delta N \delta N)_{k, p, p', t} = A^B(k, p, p', t). \quad (23.2)$$

Здесь, следуя работам [40, 41], используем обозначение

$$\hat{f}_p = F_0 \frac{\partial}{\partial p} + \delta \hat{I}_p. \quad (23.3)$$

Зависимость от времени в уравнении (23.2) входит через функции  $f_1(p, t)$ ,  $F_0(t)$ .

Используя (22.27)<sub>1</sub>, найдем выражение для пространственной компоненты Фурье функции  $A^B(r - r', p, p', t)$ . В нулевом приближении по  $kl_\Phi$  ( $l_\Phi$  — физически бесконечно малый элемент длины для кинетического уравнения Больцмана — см. § 16) из (22.27)<sub>1</sub> получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} A^B(k, p, p', t) = & n^2 \int dr'' \cdot dp'' \times \\ & \times \{ \hat{\theta}_{xx''} [(\delta(p' - p'') + \delta(p' - p)) - (\delta(p' - P'') + \delta(p' - P))] \times \\ & \times f_1(P, t) f_1(P'', t) + \hat{\theta}_{x'x''} [(\delta(p - p'') + \delta(p - p')) - \\ & - (\delta(p - P'') + \delta(p - P'))] f_1(P', t) f_1(P'', t) \}. \quad (23.4)_1 \end{aligned}$$

Мы видим, что в нулевом приближении по  $kl_{\Phi}$  правая часть выражения (23.4)<sub>1</sub> не зависит от  $k$ .

Произведем соответствующее преобразование для выражения (22.27)<sub>2</sub>. В результате получим другую форму записи функции  $A^B(k, p, p', t)$ :

$$A^B(k, p, p', t) = n(\delta(p - p')I_B(p, t) + I_{pp'}) - \\ - n^2 \left\{ \hat{\theta}_{xx'} [\delta(p' - P) + \delta(p' - P'')] f_1(P, t) f_1(P'', t) + \right. \\ \left. + \hat{\theta}_{x'x''} [\delta(p - P') + \delta(p - P'')] f_1(P', t) f_1(P'', t) \right\} dr'' dp''. \quad (23.4)_2$$

Здесь  $I_{pp'} = \int I_{xx'} d(r - r')$ , функция  $I_{xx'}$  определяется выражением (22.29).

Итак, пространственная спектральная плотность  $(\delta N \delta N)_{k, p, p', t}$  определяется уравнением (23.2) с правой частью (23.4)<sub>1</sub> или (23.4)<sub>2</sub>.

Запишем теперь соответствующее уравнение для пространственно-временной спектральной плотности  $(\delta N \delta N)_{\omega, k, p, p', t}$ . В нулевом приближении по  $\tau_{ст} \partial/\partial t$  из уравнения (22.44) находим

$$(\delta N \delta N)_{\omega, k, p, p', t}^{(+)} \equiv \int_0^{\infty} (\delta N \delta N)_{t-t', k, p, p', t} e^{i\omega(t-t')} d(t-t') = \\ = \frac{(\delta N \delta N)_{k, p, p', t}}{-i(\omega - kv) + \hat{f}_p}.$$

Отсюда находим искомое выражение

$$(\delta N \delta N)_{\omega, k, p, p', t} = \frac{[i(kv - kv') + \hat{f}_p + \hat{f}_{p'}] (\delta N \delta N)_{k, p, p', t}}{[-i(\omega - kv) + \hat{f}_p] [i(\omega - kv') + \hat{f}_{p'}]}, \quad (23.5)$$

которое выражает пространственно-временную спектральную плотность через пространственную спектральную плотность. Используя уравнение (23.2), можно записать выражение (23.5) в виде

$$(\delta N \delta N)_{\omega, k, p, p', t} = \frac{A^B(k, p, p', t)}{[-i(\omega - kv) + \hat{f}_p] [i(\omega - kv') + \hat{f}_{p'}]}. \quad (23.6)$$

Таким образом, нам удалось выразить пространственно-временную спектральную плотность флуктуаций сглаженной фазовой плотности через функцию  $A^B(k, p, p', t)$ , которая, согласно (23.4)<sub>1</sub>, (23.4)<sub>2</sub>, определяется функцией распределения  $f_1(p, t)$ .

Теперь уже нетрудно найти спектральную плотность случайного источника в линеаризованном уравнении Больцмана (22.46). Из уравнения (22.46) находим выражение, связывающее



спектральные плотности  $(\delta N \delta N)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}', t}$ ,  $(yy)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}', t}$ :

$$(\delta N \delta N)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}', t} = \frac{(yy)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}', t}}{[-i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) + \hat{f}_{\mathbf{p}}][i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}') + \hat{f}_{\mathbf{p}'}]}. \quad (23.7)$$

Сравнивая выражение (23.6), (23.7), находим равенство

$$(yy)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}', t} = A^B(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t). \quad (23.8)$$

Здесь учтено, что в нулевом приближении по  $kl_{\Phi}$  функция  $A^B(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}', t)$  не зависит от  $\mathbf{k}$ .

Таким образом, спектральная плотность случайного источника в уравнении Больцмана определяется выражением (23.4)<sub>1</sub>, или (23.4)<sub>2</sub>. Так как правая часть равенства (23.8) не зависит от  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ , то пространственно-временная корреляция  $y$  определяется выражением

$$(yy)_{\tau, \mathbf{r}-\mathbf{r}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', t} = A^B(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t) \delta(\tau) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (23.9)$$

Таким образом, случайный источник в кинетическом уравнении Больцмана в нулевом приближении по  $kl_{\Phi}$  и по временному запаздыванию функций  $f_1(\mathbf{p}, t)$ ,  $f_1(\mathbf{p}', t)$  является  $\delta$ -коррелированным по времени и пространству.

В равновесном состоянии первые два члена в выражении (23.4)<sub>2</sub> обращаются в нуль, поэтому спектральная плотность  $(yy)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'}$  определяется в этом случае последним членом правой части (23.4)<sub>2</sub>. При этом  $f_1$  — распределение Максвелла. Используя определение оператора  $\delta \hat{I}_{\mathbf{p}}$  (22.37), выражение для функции  $(yy)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}', t}$  в равновесном состоянии можно записать в виде

$$(yy)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'} = (\delta \hat{I}_{\mathbf{p}} + \delta \hat{I}_{\mathbf{p}'}) n \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') f_1(\mathbf{p}). \quad (23.10)$$

Этот результат впервые был получен в работе Кадомцева [25].

В неравновесном состоянии вместо (23.8), (23.4)<sub>2</sub> можно использовать выражение

$$(yy)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}', t} = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') n I_B(\mathbf{p}, t) + n I_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}(t) + (\delta \hat{I}_{\mathbf{p}} + \delta \hat{I}_{\mathbf{p}'}) n \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') f_1(\mathbf{p}, t). \quad (23.11)$$

Здесь

$$I_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = n \int \hat{\theta}_{xx'} f_1(\mathbf{P}, t) f_1(\mathbf{P}', t) d(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (23.12)$$

Следуя работе [40], это выражение можно назвать «непринтегрированный интеграл столкновений», так как  $\int I_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} d\mathbf{p}' = I_B(\mathbf{p}, t)$ .

В стационарном состоянии, когда функция  $f_1$  не зависит от времени, выражение (23.11) совпадет с полученным в работах Ганцевича, Гуревича, Катилюса [40, 41].

В работе Горькова, Дзялошинского и Питаевского [38] спектральная плотность (23.10) выражена через вероятности перехода. Соответствующий результат для неравновесного, но стационарного состояния газа получен в работе Когана и Шульмана [39].

Отметим еще раз, что выражения (23.4)<sub>1</sub>, (23.4)<sub>2</sub>, (23.11) справедливы лишь при условии, что вклад крупномасштабных флуктуаций в кинетическое уравнение (21.1) пренебрежимо мал, т. е.  $\bar{I} = 0$ . В этом приближении в уравнениях (22.40), (22.41) можно опустить члены с  $\delta F$ , учитывающие вклад крупномасштабных флуктуаций силы. Эти ограничения будут сняты в гл. 11, посвященной кинетической теории флуктуаций в плазме.

Рассмотрим общие свойства спектральной плотности  $(yy)_{\omega, k, p, p', t}$  (23.8), которые аналогичны свойствам (11.5), (11.7) для интеграла столкновений Больцмана. Для функции  $A^B(p, p', t)$  будем использовать выражение (23.4)<sub>2</sub>.

Умножим функции (23.4)<sub>2</sub> на произвольные функции  $\varphi(p)$ ,  $\psi(p')$  и проинтегрируем по  $p, p'$ . Введем обозначение

$$I_{\omega, k}(t) = \int \varphi(p_1) \psi(p_2) (yy)_{\omega, k, p_1, p_2, t} dp_1 dp_2. \quad (23.13)$$

Здесь и ниже вместо  $p, p'$  удобнее использовать переменные  $p_1, p_2$ .

Из (23.13), (23.4)<sub>2</sub> после симметризации по  $p_1, p_2$  получим выражение

$$\begin{aligned} I_{\omega, k}(t) = & \frac{n^2}{2} \int (\varphi(p_1) + \varphi(p_2)) \hat{\theta}_{12} (\psi(p_1) + \psi(p_2)) \times \\ & \times f_1(p_1, t) f_1(p_2, t) dr_2 dp_1 dp_2 - \frac{n^2}{2} \int \{(\varphi(p_1) + \varphi(p_2)) \hat{\theta}_{12} (\psi(p_1) + \\ & + \psi(p_2)) f_1(p_1, t) f_1(p_2, t) + \varphi \leftrightarrow \psi\} dr_2 dp_1 dp_2. \end{aligned} \quad (23.14)$$

Здесь использовано выражение для интеграла столкновений Больцмана  $I_B$  и выражение (23.12) для «непроектированного интеграла столкновений».

Запись (23.14) соответствует представлению Боголюбова. Для определения общих свойств выражения (23.14) удобнее использовать больцмановскую форму. Для этого в (23.14) оператор

$$\hat{\theta}_{12} = \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial r_1} \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial r_2} \frac{\partial}{\partial p_2} \rightarrow v_1 \frac{\partial}{\partial r_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial r_2}. \quad (23.15)$$

Как и при переходе от выражения (10.10) к (10.18), введем цилиндрическую систему координат  $z, \rho, \alpha$  с осью  $z$  вдоль вектора относительной скорости  $v_1 - v_2$ . Выражение (23.14) примет

тогда вид

$$I_{\omega k}(t) = \frac{n^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\alpha \int dp_1 dp_2 |v_2 - v_1| \{ (\varphi(p_1) + \varphi(p_2)) \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2} (\psi(p_1) + \psi(p_2)) - (\psi(P_1) + \psi(P_2)) \right] f_1(P_1, t) f_1(P_2, t) + \varphi \rightleftharpoons \psi \}. \quad (23.16)$$

Пронтегрируем по  $z$  и, как и в § 10, рассмотрим два типа столкновений. При  $z = -\infty$   $P_{1,2} \rightarrow p_{1,2}$  (см. (10.16)), а  $p'_{1,2}$  — импульсы после столкновения типа  $a$ . При  $z = +\infty$   $P_{1,2} \rightarrow p'_{1,2}$ , а  $p_{1,2}$  — импульсы после столкновения типа  $b$  (см. (10.17)).

В результате выражение (23.16) примет вид

$$I_{\omega k}(t) = \frac{n^2}{2} \int_0^{\infty} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\alpha \int dp_1 dp_2 |v_2 - v_1| \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2} [(\varphi(p_1) + \varphi(p_2)) (\psi(p_1) + \psi(p_2)) f_1(p'_1, t) f_1(p'_2, t) - \right. \\ \left. - (\varphi(p_1) + \varphi(p_2)) (\psi(p_1) + \psi(p_2)) f_1(p_1, t) f_1(p_2, t)] - \right. \\ \left. - [(\varphi(p_1) + \varphi(p_2)) (\psi(p'_1) + \psi(p'_2)) f_1(p'_1, t) f_1(p'_2, t) - \right. \\ \left. - (\varphi(p_1) + \varphi(p_2)) (\psi(p_1) + \psi(p_2)) f_1(p_1, t) f_1(p_2, t)] + \varphi \rightleftharpoons \psi \}$$

Преобразуем выражение в фигурных скобках. После приведения одинаковых членов и симметризации по импульсам до  $(p_1, p_2)$  и после  $(p'_1, p'_2)$  столкновений получим

$$\left\{ \right\} = \frac{1}{2} \{ (\varphi(p_1) + \varphi(p_2)) (\psi(p_1) + \psi(p_2)) - \\ - 2 (\varphi(p'_1) + \varphi(p'_2)) (\psi(p_1) + \psi(p_2)) + \\ + (\varphi(p'_1) + \varphi(p'_2)) (\psi(p'_1) + \psi(p'_2)) + \varphi \rightleftharpoons \psi \} f_1(p_1, t) f_1(p_2, t) = \\ = (\varphi(p_1) + \varphi(p_2) - \varphi(p'_1) - \varphi(p'_2)) (\psi(p_1) + \\ + \psi(p_2) - \psi(p'_1) - \psi(p'_2)) f_1(p_1, t) f_1(p_2, t).$$

В результате

$$I_{\omega k}(t) = \frac{n^2}{2} \int_0^{\infty} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\alpha \int dp_1 dp_2 |v_2 - v_1| f_1(p_1, t) f_1(p_2, t) \times \\ \times (\varphi(p_1) + \varphi(p_2) - \varphi(p'_1) - \varphi(p'_2)) (\psi(p_1) + \psi(p_2) - \\ - \psi(p'_1) - \psi(p'_2)). \quad (23.17)$$

Отсюда следуют свойства

$$I_{\omega k}(t) = 0 \begin{cases} \text{при } \varphi = 1, \mathbf{p}, \mathbf{p}^2/2m \text{ и при любой функции } \psi, \\ \text{при } \psi = 1, \mathbf{p}, \mathbf{p}^2/2m \text{ и при любой функции } \varphi \end{cases} \quad (23.18)_1$$

и

$$I_{\omega k}(t) \geq 0 \text{ при } \varphi = \psi, \text{ в частности, при } \varphi = \psi = -\kappa \ln f_1(\mathbf{p}, t). \quad (23.18)_2$$

Знак равенства имеет место для равновесного состояния.

Вследствие свойств (23.18)<sub>1</sub> при переходе от уравнения Больцмана для случайной функции  $N$  с источником  $y$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) N(\mathbf{r}, t) = \int \hat{\theta}_{xx'} N(\mathbf{r}, \mathbf{P}, t) N(\mathbf{r}, \mathbf{P}', t) d\mathbf{x}' + y \quad (23.19)$$

к уравнению газовой динамики для случайных газодинамических функций

$$\rho(\mathbf{r}, t) = m \int N d\mathbf{p}, \quad \rho \mathbf{u} = \int \mathbf{p} N d\mathbf{p}, \quad W = \int \frac{\mathbf{p}^2}{2m} N d\mathbf{p} \quad (23.20)$$

(эти равенства при усреднении переходят в (7.1)) можно считать, что

$$m \int y(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p} = 0, \quad \int \mathbf{p} y(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p} = 0, \quad \int \frac{\mathbf{p}^2}{2m} y(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p} = 0. \quad (23.21)$$

Следовательно, источник  $y$  не входит явно в уравнения баланса плотности частиц, плотности импульса и плотности кинетической энергии. Однако уравнения переноса не являются детерминированными, так как в них входят функции  $\pi_{ij}$ ,  $S_i$  — тензор вязких напряжений и вектор теплового потока (см. уравнения (15.27) — (15.29)). При вычислении этих функций, например по методу Грэда, получим выражения

$$\begin{aligned} \pi_{ij} &= -\eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial r_k} \right) + \delta \pi_{ij}, \\ S_i &= -\kappa \frac{\partial T}{\partial r_i} + \delta S_i, \end{aligned} \quad (23.22)$$

которые отличаются от (7.17), (7.18) наличием случайных источников  $\delta \pi_{ij}$ ,  $\delta S_i$ . Спектральные плотности этих источников выра-

жаются через спектральную плотность источника  $y$  в кинетическом уравнении Больцмана (23.19) по формулам

$$\begin{aligned} (\delta\pi_{ij} \delta\pi_{kl})_{\omega, k} &= m^2 \int \delta v_{1i} \delta v_{1j} \delta v_{2k} \delta v_{2l} (yy)_{\omega, k, p_1, p_2} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2, \\ (\delta S_i \delta S_j)_{\omega, k} &= \int \delta v_{1i} \frac{m \delta v_1^2}{2} \delta v_{2j} \frac{m \delta v_2^2}{2} (yy)_{\omega, k, p_1, p_2} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2. \end{aligned} \quad (23.23)$$

Здесь  $\delta v = v - u$  — относительная скорость.

В тринадцатимомментном приближении Грэда выражения (23.23) принимают вид

$$(\delta\pi_{ij} \delta\pi_{kl})_{\omega, k} = 2\eta\kappa T \left[ \delta_{ij} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right], \quad (23.24)$$

$$(\delta S_i \delta S_j)_{\omega k} = 2\pi T^2 \kappa \delta_{ij}. \quad (23.25)$$

Эти выражения совпадают с полученными феноменологическим путем в работе Ландау и Лифшица [60].

Таким образом, в уравнения газовой динамики для идеального газа случайные источники входят в выражения для тензора вязких напряжений и в вектор теплового потока (23.22). Для неидеального газа положение может измениться, так как свойства функции  $I_{\omega k}(t)$  будут иными.

Свойство (23.18)<sub>2</sub> существенно при исследовании эволюции корреляции флуктуаций энтропии.

Заметим в заключение этой главы, что при учете вклада крупномасштабных флуктуаций в кинетическое уравнение Больцмана, т. е. при  $\tilde{T} \neq 0$ , в уравнения газовой динамики появятся дополнительные диссипативные члены — добавки к коэффициентам вязкости и теплопроводности, обусловленные крупномасштабными флуктуациями. Вследствие этого появляются дополнительные вклады в выражениях (23.24), (23.25) для спектральных плотностей источников  $\delta\pi_{ij}$ ,  $\delta S_i$ .

## КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕИДЕАЛЬНОЙ ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ

---

### ВВЕДЕНИЕ

В газе основным параметром является параметр плотности  $\epsilon = nr_0^3$ . Используя малость параметра плотности, удастся вместо цепочки зацепляющихся уравнений для функций распределения  $f_1, f_2, f_3, \dots$  получить замкнутое уравнение для одночастичной функции распределения  $f_1$  — кинетическое уравнение. В первом приближении по параметру плотности, что соответствует модели парных столкновений, кинетическим уравнением для газа является уравнение Больцмана.

При условии  $\epsilon \ll 1$  число частиц газа в объеме с радиусом  $r_0$  много меньше единицы. В плазме положение обратное. Роль эффективного радиуса взаимодействия заряженных частиц играет радиус Дебая  $r_D$ . Он определяется выражением

$$r_D^2 = \kappa T / (4\pi \sum_a e_a^2 n_a).$$

Обычно в плазме в сфере с радиусом Дебая содержится большое число частиц, т. е. величина  $nr_D^3 \gg 1$ . Это означает, что каждая частица одновременно взаимодействует с большим числом частиц. Малым параметром для плазмы является величина

$$\mu = 1 / (nr_D^3),$$

которая называется плазменным параметром.

Из определения величин  $\mu$  и  $r_D$  следует, что плазменный параметр  $\mu \sim e^2 / (r_D \kappa T)$ , т. е. порядка отношения потенциальной энергии взаимодействия заряженных частиц на расстоянии  $r_D$  к средней кинетической энергии.

Наряду с  $\mu$  в теории плазмы вводят параметр

$$\xi = \frac{e^2}{r_{cp} \kappa T} \sim \mu \frac{r_D}{r_{cp}} \sim \mu^{2/3}$$

— параметр взаимодействия. Он определяется отношением средней потенциальной энергии взаимодействия заряженных частиц (точнее, потенциальной энергии на расстоянии  $r_{cp}$ ) к средней кинетической энергии. При  $\xi \ll 1$  роль взаимодействия частиц

мала, поэтому плазма близка к идеальной, когда  $\xi = 0$ , и, следовательно, можно использовать теорию возмущений по взаимодействию.

Из сравнения параметров  $\xi$ ,  $\mu$  следует, что при  $r_{\text{ср}} < r_D$  плазменный параметр  $\mu$  меньше параметра взаимодействия  $\xi$ .

Возможность использования кинетических уравнений для плазмы обусловлена не малостью параметра плотности, как в газе, а тем, что каждая частица плазмы взаимодействует сразу с большим числом частиц. В силу этого малы флуктуации плотности заряженных частиц плазмы в объемах, больших по сравнению с  $r_{\text{ср}}^3$ , и флуктуации напряженностей электрического и магнитного полей. Нулевое приближение по плазменному параметру соответствует полному пренебрежению флуктуациями.

Современная кинетическая теория плазмы базируется на работах Л. Д. Ландау (1936), А. А. Власова (1938), Н. Н. Боголюбова (1946). Ландау получил, основываясь на кинетическом уравнении Больцмана, кинетическое уравнение для заряженных частиц — кинетическое уравнение Ландау.

При выводе кинетического уравнения Ландау используется теория возмущений по параметру взаимодействия  $\xi$ . Однако теория возмущений недостаточна для описания процессов в плазме. Это проявляется, в частности, в том, что интеграл столкновений Ландау содержит логарифмически расходящийся интеграл по волновым числам.

Расходимость на малых расстояниях (больших волновых числах) не может быть устранена в рамках теории возмущений, так как на малых расстояниях энергия взаимодействия и корреляционная функция не являются малыми. Для устранения расходимости надо просуммировать весь ряд теории возмущения по  $\xi$ . Для разреженной плазмы это приводит к результату, соответствующему приближению парных столкновений (первому приближению по параметру плотности).

Расходимость в интеграле столкновений на больших расстояниях связана с тем, что при использовании теории возмущений (в низшем неисчезающем приближении по  $\xi$ ) не учитывается коллективный характер взаимодействия заряженных частиц плазмы, т. е. не учитывается тот факт, что каждая частица взаимодействует сразу с большим числом окружающих частиц. Вследствие этого в интеграле столкновений Ландау не учитываются эффекты поляризации плазмы.

При построении кинетической теории плазмы более естественным является использование теории возмущений по плазменному параметру  $\mu$ . Это соответствует теории возмущений по флуктуациям или, более точно, по корреляционным функциям.

Нулевое приближение по плазменному параметру соответствует полному пренебрежению флуктуациями, т. е. полному

гренебрежению эффектами корреляции. В этом приближении (см. § 29) получается самосогласованная система уравнений для одночастичных функций распределения  $f_a$  ( $a$  — индекс компоненты плазмы) и уравнений Максвелла для средних напряженностей электрического и магнитного полей. Плотности заряда и тока в уравнениях Максвелла определяются функциями распределения  $f_a$ . Эти уравнения впервые исследовались А. А. Власовым в 1938 г. и поэтому называются уравнениями Власова.

В уравнениях Власова не учитываются корреляционные эффекты и, как следствие этого, не учитываются диссипативные процессы в плазме. По этой причине полная энтропия плазмы в этом приближении остается неизменной.

В работе Н. Н. Боголюбова «Проблемы динамической теории в статистической физике» показано, что кинетические уравнения Власова и Ландау могут быть получены путем приближенного решения цепочки уравнений для функций распределения  $f_a, f_{ab}, f_{abc}, \dots$ , т. е. функций распределения одной, двух, трех и т. д. заряженных частиц.

Для вывода этих уравнений была использована теория возмущений по степеням параметра  $\xi$ . Уравнения Власова получаются таким путем в первом приближении теории возмущений, а уравнения Ландау во втором приближении теории возмущений по параметру  $\xi$ .

Для учета коллективных (поляризационных) эффектов в плазме в работе Боголюбова был использован метод теории возмущений по плазменному параметру (поляризационное приближение). В первом приближении по  $\mu$  получается замкнутая система уравнений для одночастичных функций распределения  $f_a$  и двухчастичных корреляционных функций  $g_{ab}$ . Уравнение для функции  $g_{ab}$  отличается от соответствующего уравнения в приближении теории возмущений наличием дополнительных членов, учитывающих эффекты поляризации плазмы (§ 35).

В работах Ленарда и Балеску было найдено решение уравнения для функции  $g_{ab}$  при условии ослабления начальной корреляции и без учета временного запаздывания и пространственной неоднородности функций  $f_a$ . В результате было получено выражение для интеграла столкновений  $I_a$  с учетом поляризации плазмы — интеграла столкновений Балеску — Ленарда (§ 37) [5, 6].

Кинетические уравнения Ландау и Балеску — Ленарда учитывают вклад взаимодействия заряженных частиц лишь в диссипативные характеристики плазмы. В этом смысле уравнения являются кинетическими уравнениями для идеальной плазмы. В гл. 9, 10 будет проведено обобщение этих кинетических уравнений с целью полного учета, например, в первом приближении по плазменному параметру  $\mu$ , вклада взаимодействия заряжен-



ных частиц. Тем самым будут получены кинетические уравнения для неидеальной плазмы.

В работах [1, 4—6] при выводе кинетических уравнений учитывается лишь кулоновское взаимодействие заряженных частиц (кулоновская плазма). Метод Боголюбова может быть использован и в более общем случае, когда необходим учет не только потенциального электрического поля, но и вихревого электромагнитного поля. Такой подход при описании процессов в плазме оказывается чрезвычайно сложным.

Более удобно для плазмы в качестве исходной использовать систему уравнений для микроскопических фазовых плотностей каждой компоненты плазмы  $N_a(x, t)$  и микроскопических напряженностей электрического и магнитного полей (§ 24). Использование такого подхода позволяет существенно упростить решение ряда задач. Это обусловлено тем, что вместо очень сложных уравнений для функций распределения координат и импульсов частиц и переменных поля приходится решать сравнительно более простые уравнения для моментов фазовых плотностей  $N_a$  и микроскопических напряженностей полей или еще более простые уравнения для случайных отклонений этих функций от их средних значений (§§ 34, 35).

Кинетические уравнения Ландау и Балеску — Ленарда обладают одним общим недостатком. Он состоит в том, что в интегралах столкновений при интегрировании по волновым числам возникает логарифмическая расходимость при больших значениях волнового числа. (Это соответствует малым расстояниям между заряженными частицами.) Напротив, если для описания процессов в кулоновской плазме использовать кинетическое уравнение Больцмана, в котором не используется предположение о малости параметра  $\xi$ , то соответствующий интеграл столкновений имеет логарифмическую расходимость на больших расстояниях.

При описании неравновесных процессов в неидеальной плазме необходимо иметь кинетическое уравнение, в котором корректно учтены вклады взаимодействия заряженных частиц как на больших, так и на малых расстояниях. Вследствие этого возникает задача построения обобщенных кинетических уравнений для плазмы, которые учитывали бы и коллективные взаимодействия (они играют основную роль на больших расстояниях) и парные взаимодействия (они играют основную роль на малых расстояниях).

Возможности построения таких уравнений будут обсуждаться в § 56. Часть III будет посвящена квантовой кинетической теории неидеальной плазмы.

## МИКРОСКОПИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ. УСРЕДНЕНИЕ МИКРОСКОПИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

### § 24. Микроскопические уравнения для полностью ионизованной плазмы

В первой части были рассмотрены два способа описания неравновесных процессов в газах. Один из них основан на использовании в качестве исходного уравнения Лиувилля для функции распределения значений координат и импульсов всех частиц газа — функции распределения  $f_N(x, t)$ . Основываясь на уравнении Лиувилля, можно построить цепочку уравнений для функций распределения переменных одной, двух и т. д. частиц, т. е. для функций  $f_1, f_2, \dots$ . Приближенное решение этой цепочки уравнений позволяет при определенных условиях получить кинетические уравнения для газа — замкнутые уравнения для одночастичной функции распределения  $f_1$ .

Второй способ описания неравновесных процессов в газах основан на использовании в качестве исходного уравнения для фазовой плотности в шестимерном пространстве координат и импульсов, т. е. для функции

$$N(x, t) = \sum_{1 \leq i \leq N} \delta(x - x_i(t)), \quad x = (r, p). \quad (24.1)$$

Эволюция фазовой плотности определяется уравнением (4.6) (или (4.7)).

Используя уравнение для фазовой плотности, можно построить цепочку уравнений для моментов фазовой плотности. Цепочка уравнений для моментов эквивалентна цепочке уравнений для функций распределения  $f_1, f_2, \dots$

В полностью ионизованной плазме микроскопическое состояние определяется не только значениями координат и импульсов всех заряженных частиц, но и значениями микроскопических напряженностей электрического и магнитного полей в каждой точке

пространства. Вследствие этого описание неравновесных процессов в плазме, основанное на уравнении Лиувилля для функции распределения переменных частиц и поля, становится чрезвычайно сложным. Более удобным оказывается использование в качестве исходной системы уравнений для микроскопических фазовых плотностей всех компонент заряженных частиц и микроскопических полей.

Обозначим через  $e_a$ ,  $m_a$  заряд и массу частицы компоненты  $a$ . В полностью ионизованной электрон-ионной плазме индекс принимает два значения:  $a = e, i$  ( $e_e \equiv e$ ,  $e_i \equiv Z|e|$ ). Используем обозначение  $N_a$  для полного числа частиц компоненты  $a$ ;  $N_a/V = n_a$  — средняя концентрация частиц компоненты  $a$ .

Условие электрической нейтральности плазмы можно записать в виде

$$\sum_a e_a N_a = 0 \quad \text{или} \quad \sum_a e_a n_a = 0. \quad (24.2)$$

Фазовая плотность распределения частиц компоненты  $a$  в соответствующем шестимерном пространстве  $x = (\mathbf{r}, \mathbf{p})$  определяется выражением

$$N_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_{1 \leq i \leq N_a} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{ia}(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{ia}(t)) \quad (24.3)$$

или короче

$$N_a(x, t) = \sum_{1 \leq i \leq N_a} \delta(x - x_{ia}(t)). \quad (24.4)$$

Из этих определений следует, что величина  $N_a(x, t) dx$  равна числу частиц компоненты  $a$ , координаты и импульсы которых в момент  $t$  заключены в объеме  $dx$  около точки  $x$ . Интеграл по всему фазовому пространству

$$\int N_a(x, t) dx = N_a,$$

т. е. равен полному числу частиц компоненты  $a$ .

Эволюция фазовой плотности  $N_a$  определяется уравнением, аналогичным уравнению (4.6):

$$\frac{\partial N_a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial N_a}{\partial \mathbf{r}} + F_a^M(\mathbf{r}, t) \frac{\partial N_a}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad \mathbf{v} = \mathbf{p}/m_a. \quad (24.5)$$

Сила  $F_a^M$  определяется выражением

$$F_a^M = F_{a0} + e_a \mathbf{E}^M(\mathbf{r}, t) + \frac{e_a}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}^M(\mathbf{r}, t)]. \quad (24.6)$$

Здесь  $F_{a0}$  — внешняя сила, действующая на заряженную частицу,  $\mathbf{E}^M$ ,  $\mathbf{B}^M$  — микроскопические напряженности электрического и магнитного полей.

Микроскопические плотности заряда и тока  $q^M, j^M$  выражаются через фазовые плотности:

$$\begin{aligned} q^M(\mathbf{r}, t) &= \sum_a e_a \int N_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}, \\ j^M(\mathbf{r}, t) &= \sum_a e_a \int v N_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (24.7)$$

С учетом этих равенств уравнения для микроскопических напряженностей электрического и магнитного полей — уравнения Лоренца — можно записать в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}^M = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}^M}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_a e_a \int v N_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}, \quad (24.8)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}^M = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}^M}{\partial t}, \quad (24.9)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}^M = 0, \quad (24.10)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E}^M = 4\pi \sum_a e_a \int N_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}. \quad (24.11)$$

Уравнения (24.5), (24.6), (24.8) — (24.11) составляют замкнутую систему уравнений для микроскопических функций  $N_a(x, t)$ ,  $\mathbf{E}^M, \mathbf{B}^M$ .

Вместо уравнений для функций  $\mathbf{E}^M, \mathbf{B}^M$  можно использовать систему уравнений для потенциалов  $\mathbf{A}^M, \varphi^M$ . Напряженности полей и потенциалы связаны равенствами

$$\mathbf{B}^M = \operatorname{rot} \mathbf{A}^M, \quad \mathbf{E}^M = -\operatorname{grad} \varphi^M - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}^M}{\partial t}. \quad (24.12)$$

Некоторый произвол в выборе потенциалов позволяет наложить на них дополнительную связь.

Микроскопические уравнения (24.5), (24.6), (24.8) — (24.11) будут справедливы и для релятивистской плазмы, если в них связь импульса и скорости  $\mathbf{p} = m_a \mathbf{v}$  заменить соответствующим релятивистским соотношением

$$\mathbf{p} = m_a \mathbf{v} / \sqrt{1 - v^2/c^2} \equiv \gamma m_a \mathbf{v}. \quad (24.13)$$

Действительно, величина

$$N_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{p} \quad (24.14)$$

определяет число частиц компоненты  $a$  в объеме  $d\mathbf{r} d\mathbf{p}$  и не зависит от выбора системы отсчета. Поскольку элемент фазового объема  $d\mathbf{r} d\mathbf{p}$  неизменен, то остается неизменной при изменении системы отсчета и функция  $N_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  (более подробно см. [8, 9]).

При описании процессов в релятивистской плазме вместо фазовой плотности  $N_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  можно использовать соответствующую функцию в пространстве восьми переменных — в пространстве четырехмерных координат и импульсов  $Q = (\mathbf{r}, ict)$ ,  $P = (\mathbf{p}, i\mathcal{E}/c)$ . Функция  $N_a(Q, P)$  определяется следующим выражением:

$$N_a(Q, P) = \sum_{1 \leq i \leq N_a} \int \delta(Q - Q_{ia}(s_i)) \delta(P - P_{ia}(s_i)) ds_i, \quad (24.15)$$

где  $s_i$  — собственное время частицы компоненты  $a$  с номером  $i$ .

Вместо системы уравнений (24.5), (24.6), (24.8) — (24.11) для описания процессов в релятивистской плазме можно использовать систему уравнений для функций  $N_a(Q, P)$  и тензора  $F_i^M$ , компонентами которого являются напряженности электромагнитного поля  $\mathbf{E}^M, \mathbf{B}^M$ . Эта система уравнений имеет вид

$$u_i \frac{\partial N_a}{\partial Q_i} + \frac{e_a}{c} F_{ik}^M u_k \frac{\partial N_a}{\partial P_i} = 0, \quad (24.16)$$

$$\frac{\partial F_{ik}^M}{\partial Q_k} = 4\pi \sum_a e_a \int u_i N(Q, P) dp d\mathcal{E}, \quad (24.17)$$

$$\frac{\partial F_{ik}^M}{\partial Q_l} + \frac{\partial F_{kl}^M}{\partial Q_i} + \frac{\partial F_{li}^M}{\partial Q_k} = 0 \quad (i, k, l = 1, 2, 3, 4). \quad (24.18)$$

Здесь  $u_i$  — компонента четырехмерного вектора скорости  $u = (\gamma\mathbf{v}, i\gamma c)$ .

Релятивистская инвариантность системы уравнений (24.16) — (24.18) очевидна. Система уравнений (24.16) — (24.18) может быть получена с помощью вариационного принципа [8].

## § 25. Микроскопические уравнения для кулоновской плазмы

В тех случаях, когда можно ограничиться учетом лишь кулоновского взаимодействия между заряженными частицами (кулоновская плазма), система уравнений (24.5), (24.6), (24.8) — (24.11) значительно упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial N_a}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial N_a}{\partial \mathbf{r}} + (e_a \mathbf{E}^M + F_{a0}) \frac{\partial N_a}{\partial p} = 0, \quad (25.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E}^M = 0, \quad \text{div } \mathbf{E}^M = 4\pi \sum_a e_a \int N_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}. \quad (25.2)$$

В уравнении (25.1)

$$F_{a0} = e_a \mathbf{E}_0 + \frac{e_a}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}_0] \quad (25.3)$$

— внешняя сила,  $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$  — напряженности внешних электрического и магнитного полей.

Система (25.1), (25.2) — замкнутая система уравнений для фазовых плотностей  $N_a$  и потенциального электрического поля  $\mathbf{E}^m = -\text{grad } \varphi^m$ .

В кулоновской плазме состояние системы полностью определяется значениями координат и импульсов частиц. Вследствие этого поле  $\mathbf{E}^m$  полностью определяется функциями  $N_a(x, t)$ . Действительно, из уравнений (25.2) следует выражение

$$\mathbf{E}^m(\mathbf{r}, t) = -\text{grad } \varphi^m = -\sum_b e_b \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} N_b(x', t) dx'. \quad (25.4)$$

Исключим с помощью этого выражения напряженность поля  $\mathbf{E}^m$  из уравнения (25.1). В результате получим замкнутую систему уравнений для функций  $N_a(x, t)$ :

$$\frac{\partial N_a}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial N_a}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}_{a0} \frac{\partial N_a}{\partial \mathbf{p}} - \sum_b \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int \frac{e_a e_b}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} N_b(x', t) dx' \frac{\partial N_a}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (25.5)$$

Эта система уравнений аналогична уравнению (4.7) для фазовой плотности атомов газа.

Для электронно-ионной плазмы (25.5) — система двух уравнений для фазовых плотностей электронов  $N_e$  и ионов  $N_i$ .

Непосредственное использование микроскопических уравнений для плазмы невозможно из-за чрезвычайной их сложности, перейдем поэтому к уравнениям для моментов случайных функций  $N_a, \mathbf{E}^m$ .

## § 26. Усреднение микроскопических уравнений

Усредним уравнения (25.1) и используем определения функции распределения  $f_a$  и среднего поля  $\mathbf{E}$ :

$$\bar{N}_a(x, t) = n_a f_a(x, t), \quad \bar{\mathbf{E}}^m = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (26.1)$$

и тождество

$$\overline{\mathbf{E}^m N_a(x, t)} = \mathbf{E} n_a f_a + (\delta \mathbf{E} \delta N_a)_{\mathbf{r}, x, t}. \quad (26.2)$$

В результате получим уравнение для функции распределения  $f_a$ . Запишем его в виде

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{r}} + (e_a \mathbf{E} + \mathbf{F}_{a0}) \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{e_a}{n_a} \frac{\partial (\delta \mathbf{E} \delta N_a)_{\mathbf{r}, x, t}}{\partial \mathbf{p}} \equiv I_a(x, t), \quad (26.3)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = 4\pi \sum_a e_a n_a \int f_a(x, t) d\mathbf{p}.$$

Уравнение (26.3) аналогично уравнению (6.2) для газа. Правую часть уравнения (26.3) по аналогии будем называть интегралом столкновений. Такое название лишь подчеркивает аналогию, но не отражает существа дела, так как в плазме каждая частица взаимодействует сразу с большим числом окружающих частиц. Вследствие этого модель парных столкновений заряженных частиц в плазме (откуда и возникло название «интеграл столкновений») не является удовлетворительной.

Для удобства записи введем обозначение для операторов  $L_a$ ,  $\hat{L}_{ab}$ , ... Например,

$$\hat{L}_{ab} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{v}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} + \mathbf{F}_a \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{F}_b \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} \right). \quad (26.4)$$

в  $\hat{L}_{ab}^0$  средняя сила  $\mathbf{F}_a$  заменяется на  $\mathbf{F}_{a0}$ . Тогда уравнение (26.3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \hat{L}_{af} a &= - \frac{e_a}{n_a} \frac{\partial (\overline{\delta \mathbf{E} \delta N_a})_{r, x, t}}{\partial \mathbf{p}} \equiv I_a(x, t), \\ \text{rot } \mathbf{E} &= 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = 4\pi \sum_u e_u n_u \int f_u d\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (26.5)$$

Эти уравнения незамкнуты, так как в них входит второй момент  $\overline{\delta \mathbf{E} \delta N_a}$ . Используя выражение (25.4), его можно выразить через функцию  $(\overline{\delta N_a \delta N_b})_{x, x', t}$ :

$$(\overline{\delta \mathbf{E} \delta N_a})_{r, x, t} = - \sum_b e_b \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (\overline{\delta N_a \delta N_b})_{x, x', t} d\mathbf{x}'. \quad (26.6)$$

Запишем уравнение для функции  $(\overline{\delta N_a \delta N_b})_{x, x', t}$ . Для этого запишем сначала уравнение для отклонения

$$\delta N_a = N_a - \bar{N}_a \equiv N_a - n_a f_a. \quad (26.7)$$

Из уравнений (25.1), (25.2), (26.5) находим уравнения для случайных отклонений  $\delta N_a$ ,  $\delta \mathbf{E}$ :

$$\begin{aligned} \hat{L}_a \delta N_a + e_a \delta \mathbf{E} \frac{\partial n_a f_a}{\partial \mathbf{p}} &= - e_a \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} [\delta \mathbf{E} \delta N_a - (\overline{\delta \mathbf{E} \delta N_a})_{r, x, t}], \\ \text{rot } \delta \mathbf{E} &= 0, \quad \text{div } \delta \mathbf{E} = 4\pi \sum_a e_a \int \delta N_a d\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (26.8)$$

Умножим уравнение (26.8) на  $\delta N_b(x', t)$  и усредним. Соответствующее уравнение для функции  $\delta N_b$  умножим на  $\delta N_a$  и также произведем усреднения. Полученные таким образом уравнения сложим. В результате получим искомое уравнение для

функции  $(\overline{\delta N_a \delta N_b})_{x, x', t}$ . Используя обозначение (26.4), запишем его в виде

$$\begin{aligned} & \widehat{L}_{ab} (\overline{\delta N_a \delta N_b})_{x, x', t} + e_a (\overline{\delta E \delta N_b})_{r, x', t} \frac{\partial n_a^f a}{\partial p} + \\ & \quad + e_b (\overline{\delta N_a \delta E})_{x, r', t} \frac{\partial n_b^f b}{\partial p'} = \\ & = -e_a \frac{\partial}{\partial p} (\overline{\delta E \delta N_a \delta N_b})_{r, x, x', t} - e_b \frac{\partial}{\partial p'} (\overline{\delta N_a \delta E \delta N_b})_{x, r', x', t}. \end{aligned} \quad (26.9)$$

Это — второе уравнение цепочки уравнений для моментов функций  $\delta N_a$ . Оно аналогично уравнению (6.6) и также незамкнуто, так как в него входят третьи моменты.

От цепочки уравнений для моментов можно перейти к цепочке уравнений для функций распределения  $f_a, f_{ab}, f_{abc}, \dots$  или, что в ряде случаев более удобно, к системе уравнений для одночастичных функций распределения  $f_c$  и корреляционных функций  $g_{ab}, g_{abc}, \dots$

Приведем формулы, связывающие вторые и третьи моменты с функциями  $f_a, g_{ab}, g_{abc}$ . Эти формулы аналогичны формулам (5.6), (5.10):

$$\begin{aligned} (\overline{\delta N_a \delta N_b})_{x, x', t} &= \frac{N_a N_b - \delta_{ab} N_a}{V^2} g_{ab}(x, x', t) + \\ &+ \frac{N_a}{V} \delta_{ab} \left[ \delta(x - x') f_a - \frac{1}{V} f_a(x, t) f_b(x', t) \right]. \end{aligned} \quad (26.10)$$

Отсюда при  $N \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty, N/V = n = \text{const}$

$$(\overline{\delta N_a \delta N_b})_{x, x', t} = n_a n_b g_{ab} + n_a \delta_{ab} \delta(x - x') f_a(x, t). \quad (26.11)$$

В этом же приближении ( $n_a = n_b = n$ )

$$\begin{aligned} (\overline{\delta N_a \delta N_b \delta N_c})_{x, x', x'', t} &= n^3 g_{abc} + \\ &+ n^2 [\delta_{ab} \delta(x - x') g_{bc} + \delta_{bc} \delta(x' - x'') g_{ca} + \delta_{ca} \delta(x'' - x) g_{ab}] + \\ &+ n \delta_{ab} \delta_{bc} \delta(x - x') \delta(x' - x'') f_c(x'', t). \end{aligned} \quad (26.12)$$

Эти соотношения понадобятся нам в следующем параграфе.

В общем случае, когда учитываются и потенциальное и электромагнитное поля, необходимо производить усреднение полной системы уравнений (24.5), (24.6), (24.8) — (24.11) для случайных функций  $N_a, \mathbf{E}^m, \mathbf{B}^m$ .

Производя усреднение этой системы уравнений, учитывая равенство (26.1) и тождество (26.2) и соответствующие выражения



для магнитного поля, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + v \frac{\partial f_a}{\partial r} + F_a \frac{\partial f_a}{\partial p} = -\frac{1}{n_a} \frac{\partial}{\partial p} (\overline{\delta F_a \delta N_a})_{x, x, t} \equiv I_a(x, t), \quad (26.13)$$

$$F_a = F_{a0} + e_a E + \frac{e_a}{c} [vB], \quad (26.14)$$

$$\delta F_a = e_a \delta E + \frac{e_a}{c} [v \delta B], \quad (26.15)$$

$$\text{rot } B = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_a e_a n_a \int v f_a dp, \quad (26.16)$$

$$\text{rot } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad \text{div } B = 0, \quad (26.17)$$

$$\text{div } E = 4\pi \sum_a e_a n_a \int f_a dp. \quad (26.18)$$

Как и в случае кулоновской плазмы, эта система уравнений для функций  $f_a$ ,  $E$ ,  $B$  незамкнута, так как в нее наряду с первыми моментами случайных функций  $N_a$ ,  $E^m$ ,  $B^m$ , т. е. наряду с функциями  $f_a$ ,  $E$ ,  $B$ , входят вторые моменты  $\overline{\delta F_a \delta N_a}$ . Они определяются корреляциями случайных отклонений фазовой плотности  $\delta N_a$  и напряженностей полей  $\delta E$ ,  $\delta B$ .

Запишем систему уравнений для  $\delta N_a$ ,  $\delta E$ ,  $\delta B$ . Она следует из систем уравнений (24.5), (24.6), (24.8) — (24.11), (26.13) — (26.18) и имеет вид

$$\hat{L}_a \delta N_a + \delta F_a \frac{\partial n_a f_a}{\partial p} = -\frac{\partial}{\partial p} [\delta F_a \delta N_a - \overline{\delta F_a \delta N_a}], \quad (26.19)$$

$$\text{rot } \delta B = \frac{1}{c} \frac{\partial \delta E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_a e_a \int v \delta N_a dp, \quad (26.20)$$

$$\text{rot } \delta E = -\frac{1}{c} \frac{\partial \delta B}{\partial t}, \quad (26.21)$$

$$\text{div } \delta B = 0, \quad (26.22)$$

$$\text{div } \delta E = 4\pi \sum_a e_a \int \delta N_a dp. \quad (26.23)$$

Из этой системы уравнений можно получить систему уравнений для вторых моментов случайных отклонений  $\delta N_a$ ,  $\delta E$ ,  $\delta B$ . Она, естественно, будет содержать третьи моменты. Таким образом, мы приходим к бесконечной цепочке уравнений для момен-

тов фазовых плотностей и напряженностей электромагнитного поля.

Покажем, что в первом приближении по плазменному параметру (в поляризационном приближении) цепочка уравнений обрывается.

### § 27. Приближение парных столкновений и поляризационное приближение для плазмы

Уравнение для функции  $\overline{(\delta N_a \delta N_b)}_{x, x', t}$  в поляризационном приближении аналогично уравнению (6.13) и, следовательно, имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{L}_{ab} \overline{(\delta N_a \delta N_b)}_{x, x', t} + \overline{(\delta F_a \delta N_b)}_{x, x', t} \frac{\partial n_a f_a}{\partial p} + \\ + \overline{(\delta N_a \delta F_b)}_{x, x', t} \frac{\partial n_b f_b}{\partial p'} = \hat{L}_{ab} \overline{(\delta N_a \delta N_b)}_{x, x', t}^{\text{ист}}, \end{aligned} \quad (27.1)$$

где

$$\overline{(\delta N_a \delta N_b)}_{x, x', t}^{\text{ист}} = n_a \delta_{ab} \left( \delta(x - x') f_a - \frac{1}{V} f_a(x, t) f_b(x', t) \right). \quad (27.2)$$

В предельном случае  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$ ,  $n = \text{const}$  выражение (27.2) принимает вид

$$\overline{(\delta N_a \delta N_b)}_{x, x', t}^{\text{ист}} = n_a \delta_{ab} \delta(x - x') f_a(x, t). \quad (27.3)$$

Напомним, что индекс «ист» у функции  $\overline{(\delta N_a \delta N_b)}_{x, x', t}^{\text{ист}}$  подчеркивает тот факт, что правая часть в уравнении (27.1) не зависит от второго момента, а полностью определяется одночастичными функциями распределения  $f_a$ .

Используя равенство (26.10) и уравнение (26.13) для функции  $f_a$ , можно записать в этом же приближении уравнение для корреляционной функции  $g_{ab}$ . Оно имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{L}_{ab} g_{ab}(x, x', t) = \hat{\theta}_{ab} f_a f_b + \\ + \sum_c n_c \int [\hat{\theta}_{ac} g_{cb}(x'', x', t) f_a + \hat{\theta}_{bc} g_{ac}(x, x'', t) f_b] dx''. \end{aligned} \quad (27.4)$$

Здесь введено обозначение для оператора (ср. с (1.6))

$$\hat{\theta}_{ab} = \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial \mathbf{r}'} \frac{\partial}{\partial p'}, \quad (27.5)$$

где  $\Phi_{ab} = e_a e_b / |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ .

Уравнение (27.4) аналогично уравнению (3.5) для корреляционной функции  $g_2(x_1, x_2, t)$ . В уравнении (27.4) второй член правой части, пропорциональный  $n_c$ , учитывает, как мы увидим,

эффекты поляризации. При использовании теории возмущений по  $\xi$  этот член в первом приближении можно не учитывать. В результате в первом приближении по  $\xi$  уравнение для функции  $g_{ab}$  имеет вид

$$\widehat{L}_{ab} g_{ab}(x, x', t) = \widehat{\partial}_{ab} f_a f_b \quad (27.6)$$

и соответствует уравнению (3.4).

Мы не будем выписывать здесь уравнений для двухвременной одночастичной функции  $F_a(x, t, x', t')$  и двухвременного момента  $(\delta N_a \delta N_b)_{x, t, x', t'}$ . Они соответствуют уравнениям (6.24), (6.17). Таким образом, как и для газа, отличие поляризационного приближения от приближения вторых моментов состоит в том, что в поляризационном приближении в уравнения для вторых моментов входят источники, определяемые функциями  $(\delta N_a \delta N_b)_{x, x', t}^{\text{ист}}$ ,  $(\delta N_a \delta N_b)_{x, t, x', t'}^{\text{ист}}$ , которые в свою очередь полностью определяются одночастичными функциями распределения  $f_a$ ,  $F_a$ .

На этом основании, как и в § 6, введем соответствующий источник в уравнения для флуктуаций  $\delta N_a$ . В приближении вторых моментов в уравнении (26.19) правая часть обращается в нуль. В поляризационном приближении правая часть заменится источником, соответствующим источнику в уравнениях для функций  $(\delta N_a \delta N_b)_{x, x', t}$  и  $(\delta N_a \delta N_b)_{x, t, x', t'}$ . В результате уравнение для  $\delta N_a$  примет вид

$$\widehat{L}_a \delta N_a + \delta F_a \frac{\partial n_a f_a}{\partial p} = \widehat{L}_a \delta N_a^{\text{ист}}. \quad (27.7)$$

Корреляция флуктуаций источника определяется уравнением

$$\widehat{L}_a (\delta N_a \delta N_b)_{x, t, x', t'}^{\text{ист}} = 0, \quad (27.8)$$

которое следует решать при начальном условии

$$\begin{aligned} (\delta N_a \delta N_b)_{x, t, x', t'}^{\text{ист}} \Big|_{t=t'} &= \\ &= n_a \delta_{ab} \left( \delta(x - x') f_a - \frac{1}{V} f_a(x, t) f_b(x', t) \right). \end{aligned} \quad (27.9)$$

В предельном случае  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$ ,  $N/V = \text{const}$  начальное условие упрощается:

$$(\delta N_a \delta N_b)_{x, t, x', t'}^{\text{ист}} \Big|_{t=t'} = n_a \delta_{ab} \delta(x - x') f_a. \quad (27.10)$$

В общем случае, когда учитываются флуктуации и потенциального и вихревого полей, к уравнению (27.7) надо добавить систему уравнений (26.20) — (26.23) для флуктуаций

напряженностей электрического и магнитного полей и равенство

$$\delta F_a = e_a \delta E + \frac{e_a}{c} [\mathbf{v} \delta \mathbf{B}], \quad (27.11)$$

связывающее  $\delta F_a$  в (27.7) с флуктуациями электромагнитного поля  $\delta E$ ,  $\delta B$ .

Для кулоновской плазмы к уравнению (27.7) надо добавить уравнения для флуктуации потенциального поля  $\delta E$

$$\operatorname{rot} \delta E = 0, \quad \operatorname{div} \delta E = 4\pi \sum_a e_a \int \delta N_a d\mathbf{p} \quad (27.12)$$

и равенство

$$\delta F_a = e_a \delta E. \quad (27.13)$$

Мы используем полученные здесь уравнения для флуктуаций при выводе кинетических уравнений.

## § 28. Уравнения переноса плотности, плотности импульса и плотности кинетической энергии частиц.

### Уравнения переноса плотности энергии и плотности импульса электромагнитного поля

Для вывода уравнений переноса используем систему уравнений (26.13) — (26.18) для функций  $f_a$ ,  $E$ ,  $B$ .

Суммарная плотность числа частиц всех компонент плазмы, суммарная плотность импульса плазмы и суммарная плотность кинетической энергии плазмы определяются формулами, аналогичными формулам (7.1):

$$\rho(r, t) = \sum_a m_a n_a \int f_a d\mathbf{p}, \quad \sum_a \rho_a \mathbf{u}_a = \sum_a n_a \int \mathbf{p} f_a d\mathbf{p}, \quad (28.1)$$

$$W(r, t) = \sum_a n_a \int \frac{p^2}{2m_a} f_a d\mathbf{p}.$$

Умножая уравнение (26.13) на  $n_a m_a$ , интегрируя по  $\mathbf{p}$  и суммируя по  $a$ , получим уравнение непрерывности для суммарной плотности плазмы

$$\frac{\partial \rho(r, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \sum_a \rho_a \mathbf{u}_a = 0. \quad (28.2)$$

Рассмотрим теперь уравнения баланса суммарного импульса плазмы. Тензор потока импульса плазмы  $\Pi_{ij}$  определяется

выражением

$$\Pi_{ij} = \sum_a m_a n_a \int v_i v_j f_a d\mathbf{p} \equiv \sum_a n_a m_a u_{ai} u_{aj} + P_{ij}, \quad (28.3)$$

где

$$P_{ij} = \sum_a m_a n_a \int \delta v_{ai} \delta v_{aj} f_a d\mathbf{p} \equiv \sum_a P_{ij}^{(a)} \quad (28.4)$$

— тензор напряжений в плазме,  $\delta v_{ai} = v_i - u_{ai}$ ,  $P_{ij}^{(a)}$  — тензор напряжений компоненты  $a$ .

Как и в случае газа (§ 7), тензор  $P_{ij}^{(a)}$  можно представить в виде суммы

$$P_{ij}^{(a)} = \delta_{ij} p_{нд}^{(a)} + \pi_{ij}^{(a)}, \quad p_{нд}^{(a)} = \frac{1}{3} P_{ii}^{(a)}. \quad (28.5)$$

Здесь  $p_{нд}^{(a)}$  — часть давления, создаваемого частицами компоненты  $a$ , не связанная с взаимодействием частиц,  $\pi_{ij}^{(a)}$  — соответствующий тензор вязких напряжений.

Введем, наконец, определение плотности заряда  $q$  и тока  $\mathbf{j}$ :

$$q = \sum_a e_a n_a \int f_a d\mathbf{p}, \quad \mathbf{j} = \sum_a e_a n_a \int \mathbf{v} f_a d\mathbf{p}. \quad (28.6)$$

Умножим теперь уравнение (26.13) на  $n p_i$ , проинтегрируем по  $\mathbf{p}$  и просуммируем по  $a$  и проведем преобразования, которые были сделаны при выводе уравнения (7.9). В результате получим уравнение баланса плотности суммарного импульса частиц. Запишем его для компоненты  $\sum_a \rho_a u_{ai}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_a \rho_a u_{ai} + \frac{\partial}{\partial r_j} \sum_a [\rho_a u_{ai} u_{aj} + \delta_{ij} p_{нд}^{(a)} + \pi_{ij}^{(a)}] = \\ = q E_i + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{B}]_i + \sum_a n_a \int p_i I_a d\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (28.7)$$

Это уравнение аналогично уравнению (7.9).

Первый и второй члены правой части представляют собой  $i$ -ю компоненту плотности силы. При получении этого выражения использовано равенство (26.14). Третий член в правой части определяет вклад интеграла столкновений в уравнение баланса импульса. Этот член удобно представить в иной форме. Для этого используем связь интеграла столкновений  $I_a$  с корреляцией флуктуаций силы и  $\delta N_a$ , а также выражение (26.15) и определения флуктуаций плотности заряда  $\delta q$  и плотности тока  $\delta \mathbf{j}$ :

$$\delta q = \sum_a e_a \int \delta N_a d\mathbf{p}, \quad \delta \mathbf{j} = \sum_a e_a \int \mathbf{v} \delta N_a d\mathbf{p}.$$

В результате получим выражение

$$\sum_a n_a \int \rho I_a d\rho = \overline{\delta j \delta E} + \frac{1}{c} \overline{[\delta j \delta \mathbf{B}]}. \quad (28.8)$$

Рассмотрим, наконец, уравнение баланса плотности кинетической энергии. Для этого умножим уравнение (26.13) на  $n_a \rho^2 / 2m_a$ , проинтегрируем по  $\rho$ , просуммируем по  $a$  и проведем преобразования, аналогичные тем, которые были проведены при выводе уравнения (7.14). В результате получим следующее уравнение баланса плотности суммарной кинетической энергии всех компонент плазмы. Запишем его в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_a \left( \frac{\rho_a u_a^2}{2} + \frac{3}{2} \frac{\rho_a}{m_a} \kappa T_a \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial r_i} \sum_a \left[ u_{ai} \left( \frac{\rho_a u_a^2}{2} + \frac{3\rho_a}{2m_a} \kappa T + p_{\text{пл}}^{(a)} \right) + \pi'_{ij} u_{aj} + S_{ai} \right] = \\ = jE + \sum_a n_a \int \frac{\rho^2}{2m_a} I_a d\rho. \end{aligned} \quad (28.9)$$

Здесь  $T_a$  — температура компоненты  $a$ ,  $S_a$  — вектор теплового потока компоненты  $a$ .

Используя определение интеграла столкновений (26.13), можно представить второй член в правой части уравнения (28.9) в виде

$$\sum_a n_a \int \frac{\rho^2}{2m_a} I_a d\rho = \overline{(\delta j \delta E)}. \quad (28.10)$$

Из формул (28.10), (28.8) видно, что вклады интеграла столкновений в уравнения баланса импульса и энергии плазмы выражаются через корреляции флуктуаций  $\delta q$ ,  $\delta j$  и  $\delta E$ ,  $\delta \mathbf{B}$ .

Рассмотрим теперь уравнения баланса импульса и энергии электромагнитного поля. Начнем с уравнения баланса импульса. Для этого с помощью уравнений Максвелла (26.16) — (26.18) преобразуем выражение для плотности электромагнитной силы, стоящей в правой части уравнения (28.7).

Из уравнений (26.16), (26.18) находим

$$qE + \frac{1}{c} [jB] = \frac{1}{4\pi} \text{div } E \cdot E + \frac{1}{4\pi} [\text{rot } B \cdot B] - \frac{1}{4\pi c} \left[ \frac{\partial E}{\partial t} B \right].$$

Отсюда, используя уравнения (26.17), получим

$$\begin{aligned} qE + \frac{1}{c} [jB] = \frac{1}{4\pi} (E \text{ div } E + B \text{ div } B) + \\ + \frac{1}{4\pi} \{ [\text{rot } B \cdot B] + [\text{rot } E \cdot E] \} - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} [EB]. \end{aligned} \quad (28.11)$$

Воспользуемся векторным тождеством

$$A_x \operatorname{div} \mathbf{A} + [\operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}]_x = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left( A_x^2 - \frac{1}{2} \mathbf{A}^2 \right) + \frac{\partial A_x A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_x A_z}{\partial z}. \quad (28.12)$$

Полагая здесь последовательно  $A_i = E_i$ ;  $B_i$  и складывая, запишем с помощью этого тождества уравнение (28.11) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{[\mathbf{EB}]_i}{4\pi c} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial r_j} = -qE_i - \frac{1}{c} [j\mathbf{B}]_i. \quad (28.13)$$

Тензор  $T_{ij}$  определяется выражением

$$T_{ij} = -\frac{1}{4\pi} \left( E_i E_j + B_i B_j - \delta_{ij} \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{2} \right). \quad (28.14)$$

Он называется тензором электромагнитных напряжений или тензором Максвелла.

Из уравнения (28.13) следует, что вектор

$$\frac{1}{4\pi c} [\mathbf{EB}] \quad (28.15)$$

определяет плотность импульса среднего электромагнитного поля.

Складывая уравнения баланса импульса частиц плазмы и импульса среднего (без учета флуктуаций) поля, т. е. уравнения (28.7), (28.13), получим уравнение баланса суммарного импульса — частиц плазмы и поля:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \sum_a \rho_a u_{ai} + \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{EB}]_i \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial r_j} \left\{ \sum_a [\rho_a u_{ai} u_{aj} + P_{ij}^{(a)}] + T_{ij} \right\} = \sum_a n_a \int p_i I_a d\mathbf{p}. \quad (28.16)$$

Это уравнение полезно записать и в иной форме. Для этого преобразуем правую часть равенства (28.8) с помощью уравнений (26.20) — (26.23). Производя преобразования, аналогичные тем, которые делались при выводе уравнения (28.13), получим вместо (28.8) следующее равенство:

$$\sum_a n_a \int p_i I_a d\mathbf{p} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{[\overline{\delta E \delta B}]_i}{4\pi c} - \frac{\partial}{\partial r_j} K_{ij}. \quad (28.17)$$

Здесь введено обозначение для тензора электромагнитных напряжений, создаваемых флуктуациями электромагнитного поля:

$$K_{ij} = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \overline{\delta E_i \delta E_j} + \overline{\delta B_i \delta B_j} - \delta_{ij} \frac{(\overline{\delta E})^2 + (\overline{\delta B})^2}{2} \right\}. \quad (28.18)$$

Подставляя выражение (28.17) в правую часть уравнения (28.16), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sum_a \rho_a u_{ai} + \frac{1}{4\pi c} ([\mathbf{EB}]_i + [\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{B}]_i) \right\} + \frac{\partial}{\partial r_j} \left\{ \sum_a [\rho_a u_{ai} u_{aj} + P_{ij}^{(a)}] + T_{ij} + K_{ij} \right\} = 0. \quad (28.19)$$

Отсюда следует, что суммарная плотность импульса частиц и поля с учетом флуктуаций поля определяется вектором

$$\mathbf{G} = \sum_a \rho_a \mathbf{u}_a + \frac{1}{4\pi c} ([\mathbf{EB}] + [\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{B}]) \equiv \sum_a \rho_a \mathbf{u}_a + \frac{1}{4\pi c} [\overline{\mathbf{EB}}]. \quad (28.20)$$

Выражение, стоящее в уравнении (28.19) под знаком  $\partial/\partial r_j$ , определяет суммарный тензор потока импульса частиц и электромагнитного поля в плазме.

Рассмотрим теперь уравнение баланса электромагнитной энергии. Умножим уравнение (26.16) скалярно на вектор  $\mathbf{E}$ , а уравнение (26.17) — скалярно на вектор  $\mathbf{B}$ . После этого второе уравнение вычтем из первого и используем векторное тождество

$$\operatorname{div} [\mathbf{EB}] = \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{B}. \quad (28.21)$$

В результате получим уравнение баланса плотности средней электромагнитной энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} + \operatorname{div} \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EB}] = -\mathbf{jE}. \quad (28.22)$$

Вектор

$$\mathbf{S}_\Pi = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EB}] \quad (28.23)$$

— вектор потока энергии среднего электромагнитного поля — вектор Пойнтинга.

Сложим уравнения (28.9), (28.22):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sum_a \left( \frac{\rho_a u_a^2}{2} + \frac{3\rho_a}{2m_a} \kappa T_a \right) + \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial r_i} \left\{ \sum_a \left[ u_{ai} \left( \frac{\rho_a u_a^2}{2} + \frac{3\rho_a}{2m_a} \kappa T_a + p_{\text{нд}}^{(a)} \right) + \pi_{ij}^{(a)} u_{aj} + S_i^{(a)} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EB}]_i \right\} = \sum_a n_a \int \frac{p^2}{2m_a} I_a d\mathbf{p}. \quad (28.24) \end{aligned}$$

В левую часть этого уравнения баланса энергии входят выражения для плотности суммарной энергии частиц и поля и соответ-



ствующего потока энергии без учета флуктуаций. Вклады в энергию и в поток энергии, обусловленные флуктуациями (или соответствующими корреляционными функциями), входят в уравнение баланса энергии через правую часть, т. е. через интегралы столкновений  $I_a$ . Так было и в уравнении баланса импульса.

Преобразуем правую часть уравнения (28.24), используя равенство (28.10). С помощью уравнений (26.20), (26.21), поступая так же, как и при выводе уравнения (28.22), найдем

$$\begin{aligned} \sum_a n_a \int \frac{p^2}{2m_a} I_a d\mathbf{p} &= \overline{\delta j \delta \mathbf{E}} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{\delta \mathbf{E}^2} + \overline{\delta \mathbf{B}^2}}{8\pi} - \operatorname{div} \frac{c}{4\pi} [\overline{\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{B}}]. \end{aligned} \quad (28.25)$$

Подставим это выражение в правую часть уравнения (28.24). В результате получим уравнения баланса суммарной энергии частиц и поля с явным учетом вклада флуктуаций (корреляционных эффектов):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sum_a \left( \frac{\rho_a u_a^2}{2} + \frac{3\rho_a}{2m_a} \kappa T_a \right) + \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \frac{1}{8\pi} (\overline{\delta \mathbf{E}^2} + \overline{\delta \mathbf{B}^2}) \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial r_i} \left\{ \sum_a \left[ u_{ai} \left( \frac{\rho_a u_a^2}{2} + \frac{3\rho_a}{2m_a} \kappa T_a + p_{\text{ин}}^{(a)} \right) + \pi_{ij}^{(a)} u_{aj} + S_{ai} \right] + \right. \\ \left. + \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EB}]_i + \frac{c}{4\pi} [\overline{\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{B}}]_i \right\} = 0. \end{aligned} \quad (28.26)$$

Для случая кулоновской плазмы приведенные уравнения баланса упрощаются:  $\delta \mathbf{B} = 0$ ,  $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}_0$  — внешнее магнитное поле.

**КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПЛАЗМЫ  
В ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРВЫХ МОМЕНТОВ.  
УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА**

**§ 29. Кинетическое описание процессов  
в бесстолкновительной плазме**

Введем для плазмы понятие времени релаксации  $\tau_p$  — времени, в течение которого устанавливается локальное равновесие.  $l_p$  — соответствующая длина. В случае газа соответствующие характеристики мы обозначали через  $\tau_{ст}$  (среднее время между двумя последовательными столкновениями) и  $l$  (средняя длина свободного пробега атома газа). Иногда такую же терминологию мы будем использовать и для плазмы.

Плазма состоит из нескольких компонент. В простейшем случае — из двух. Вследствие этого процессы релаксации в плазме, в общем случае, происходят в несколько этапов и соответственно характеризуются несколькими временами релаксации  $\tau_{ab}$ . Для электрон-ионной плазмы  $a = e, i$ , поэтому можно ввести три времени релаксации  $\tau_{ee}, \tau_{ei}, \tau_{ie}, \tau_{ii}$ .

Процессы релаксации обусловлены существованием флуктуаций, вклад которых в кинетические уравнения для функций  $f_a$  определяется интегралами столкновений

$$I_a = - \frac{1}{n_a} \frac{\partial \overline{\delta F_a \delta N_a}}{\partial p} \equiv - \frac{e_a}{n_a} \frac{\partial}{\partial p} \left( \overline{\delta E \delta N_a} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \overline{\delta \mathbf{B} \delta N_a}] \right). \quad (29.1)$$

Здесь использованы определения (26.13), (26.14).

Кинетические уравнения для плазмы — замкнутые уравнения для одночастичных функций распределения  $f_a$  и средних напряженностей  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ , поэтому в них интегралы столкновений

$$I_a = I_a \{f_a, \mathbf{E}, \mathbf{B}\} \quad (29.2)$$

определяются функциями  $f_a, \mathbf{E}, \mathbf{B}$ .

Если поля не очень велики (см. § 37), то интегралы столкновений явно от напряженностей  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  не зависят, т. е.

$$I_a = I_a \{f_a\}. \quad (29.3)$$

Время релаксации компоненты  $a$  определяется так, что

$$I_a \sim \frac{1}{\tau_a} f_a, \quad \frac{1}{\tau_a} = \sum_b \frac{1}{\tau_{ab}}. \quad (29.4)$$

В § 38 мы увидим, что наименьшее время релаксации  $\tau_p$  и соответствующая наименьшая длина релаксации  $l_p$  определяются величинами  $r_D$ ,  $\mu$  и  $v_T$ :

$$l_p \sim r_D/\mu, \quad \tau_p = l_p/v_T \sim r_D/v_T\mu. \quad (29.5)$$

Отсюда следует, что для разреженной плазмы, когда плазменный параметр  $\mu \ll 1$ ,

$$l_p \gg r_D, \quad \tau_p \gg r_D/v_T, \quad (29.6)$$

т. е. длина релаксации много больше величины  $r_D$ , которая определяет радиус корреляции флуктуаций плотности и одновременно эффективный радиус взаимодействия заряженных частиц.

Если характерный размер области, занимаемый плазмой,  $L$  и соответствующий временной интервал  $T$  таковы, что выполняются неравенства

$$l_p \gg L \gg r_D, \quad \tau_p \gg T \gg r_D/v_T,$$

то в нулевом приближении по  $L/l_p$ ,  $T/\tau_p$  можно не учитывать в уравнении (26.13) вклад, обусловленный флуктуациями  $\delta F_a$ ,  $\delta N_a$ , т. е. не учитывать в кинетических уравнениях вклад вторых моментов. В результате получаем замкнутую систему уравнений для первых моментов случайных функций  $N_a$ ,  $\mathbf{E}^M$ ,  $\mathbf{B}^M$ , т. е. для функций  $f_a \equiv \bar{N}_a/n_a$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ :

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{r}} + F_a \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (29.7)$$

$$\mathbf{F}_a = \mathbf{F}_{a0} + e_a \mathbf{E} + \frac{e_a}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}], \quad (29.8)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum e_a n_a \int \mathbf{v} f_a d\mathbf{p}, \quad (29.9)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (29.10)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (29.11)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi \sum_a e_a n_a \int f_a d\mathbf{p}. \quad (29.12)$$

Эта система самосогласованных уравнений впервые исследовалась А. А. Власовым и ее называют уравнениями Власова.

Для кулоновской плазмы уравнения (29.8)—(29.12) упрощаются и принимают вид

$$\mathbf{F}_a = \mathbf{F}_{a0} + e_a \mathbf{E}, \quad (29.13)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \sum_a e_a n_a \int f_a dp. \quad (29.14)$$

Вместо уравнения Пуассона для  $\mathbf{E}$  часто удобнее использовать уравнение полного тока. При этом уравнения (29.14) для потенциального поля  $\mathbf{E}$  заменяются уравнениями

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial t} + 4\pi \sum_a e_a n_a \int \mathbf{v} f_a dp = 0. \quad (29.15)$$

Уравнения (29.7)—(29.12) справедливы и для релятивистской плазмы, если в них соотношение  $\mathbf{p} = m_a \mathbf{v}$  заменить релятивистским соотношением  $\mathbf{p} = m_a \gamma \mathbf{v}$ .

В приближении первых моментов корреляционные эффекты не учитываются, поэтому на основе этих уравнений нельзя описать диссипативные процессы, обусловленные корреляциями флуктуаций  $\delta N_a$ ,  $\delta \mathbf{E}$ ,  $\delta \mathbf{B}$ . Следствием этого является то, что суммарная энтропия всех компонент плазмы

$$S(t) = -\kappa \sum_a n_a \int f_a \ln f_a dr dp \quad (29.16)$$

при условии замкнутости всей системы остается неизменной, т. е.

$$dS/dt = 0. \quad (29.17)$$

Чтобы убедиться в этом, надо умножить уравнение (29.7) на  $-\kappa n_a \ln f_a$ , проинтегрировать по  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{p}$  и просуммировать по  $a$ .

На языке теории газов уравнения (29.7)—(29.12) справедливы при полном пренебрежении столкновениями заряженных частиц в плазме, поэтому они описывают процессы в «бесстолкновительной плазме».

Для бесстолкновительной плазмы можно использовать уравнение баланса плотности, плотности импульса и плотности энергии частиц и поля, полученные в § 28, если в них опустить все члены, содержащие интегралы  $I_a$  и корреляции флуктуаций  $\delta q$ ,  $\delta j$ ,  $\delta \mathbf{E}$ ,  $\delta \mathbf{B}$ .

Вследствие неучета диссипативных процессов в уравнениях (29.7)—(29.12) на основе этих уравнений нельзя описать процессы установления равновесного состояния. Следствием этого

является то, что при отсутствии внешних полей, когда  $E_{a0} = 0$ , решением уравнений (29.7) — (29.12) при  $E = 0$ ,  $B = 0$  является произвольная функция модуля импульса, т. е. функция  $f_a(|p|)$ .

### § 30. Линейное приближение

Система самосогласованных уравнений для функций  $f_a$ ,  $E$ , при отсутствии внешних полей, когда  $F_{a0} = 0$ , имеет частное решение

$$f_a = f_a^0(|p|), \quad E = 0, \quad B = 0. \quad (30.1)$$

Действительно,

$$q = \sum_a e_a n_a \int f_a^0(|p|) dp = \sum_a e_a n_a = 0 \quad (30.2)$$

в силу общей нейтральности плазмы и

$$j = \sum_a e_a n_a \int v f_a^0(|p|) dp = 0, \quad (30.3)$$

поэтому уравнения поля в этом случае однородны и имеют решение  $E = 0$ ,  $B = 0$ .

Рассмотрим решение системы уравнений (29.7) — (29.12), близкое к частному решению (30.1). Тогда

$$f_a = f_a^0 + f_a^1(r, p, t), \quad f_a^1 \ll f_a^0, \quad (30.4)$$

$$E = E^1, \quad B = B^1.$$

Из уравнений (29.7) — (29.12) в линейном приближении по  $f_a^1$ ,  $E^1$ ,  $B^1$  получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial f_a^1}{\partial t} + v \frac{\partial f_a^1}{\partial r} + e_a E^1 \frac{\partial f_a^0}{\partial p} = 0, \quad (30.5)$$

$$\text{rot } B^1 = \frac{1}{c} \frac{\partial E^1}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_a e_a n_a \int v f_a^1 dp, \quad (30.6)$$

$$\text{rot } E^1 = -\frac{1}{c} \frac{\partial B^1}{\partial t}, \quad (30.7)$$

$$\text{div } B^1 = 0, \quad (30.8)$$

$$\text{div } E^1 = 4\pi \sum_a e_a n_a \int f_a^1 dp. \quad (30.9)$$

Мы учли, что в уравнении (30.5) выпал член с  $B^1$ , так как

$$[vB^1] \frac{\partial f_a^0(|p|)}{\partial p} = 0.$$

В случае кулоновской плазмы вместо уравнений (30.6)—(30.9) из (29.14) следуют уравнения

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}^1 = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E}^1 = 4\pi \sum_a e_a n_a \int f_a^1 d\mathbf{p}, \quad (30.10)$$

а из (29.15) — уравнения

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}^1 = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{E}^1}{\partial t} + 4\pi \sum_a e_a n_a \int \mathbf{v} f_a^1 d\mathbf{p} = 0. \quad (30.11)$$

В дальнейшем индекс «1» у  $f_a^1$ ,  $\mathbf{E}^1$ ,  $\mathbf{B}^1$  опускаем, так как это не приведет к недоразумениям.

Иногда вместо дифференциального уравнения (30.5) для функции  $f_a$  удобнее использовать соответствующее интегральное уравнение. Для этого перенесем в уравнении (30.5) последний член в правую часть и будем рассматривать его как неоднородность. Тогда решение уравнения для  $f_a$  можно представить в виде суммы двух частей: решения однородного уравнения, удовлетворяющего начальному условию  $f_a = f_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, 0)$  при  $t = 0$ , и частного решения неоднородного уравнения, которое при  $t = 0$  обращается в нуль. В результате получим уравнение

$$f_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_a(\mathbf{r} - \mathbf{v}t, \mathbf{p}, 0) - e_a \int_0^t \mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{v}(t-t'), t') dt' \frac{\partial f_a^0(|\mathbf{p}|)}{\partial \mathbf{p}}. \quad (30.12)$$

Легко проверить, что это уравнение эквивалентно исходному уравнению (30.5).

Правая часть уравнения (30.12) через поле  $E$  зависит от функций распределения  $f_a$ , поэтому уравнение (30.12) является интегральным.

Из структуры уравнения (30.12) следует, что плотности заряда и тока можно представить в виде

$$q = q^{\text{вн}} + q^{\text{внд}}, \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}^{\text{вн}} + \mathbf{j}^{\text{внд}}. \quad (30.13)$$

Первые члены  $q^{\text{вн}}$ ,  $\mathbf{j}^{\text{вн}}$  определяются выражениями

$$q^{\text{вн}} = \sum_a e_a n_a \int f_a(\mathbf{r} - \mathbf{v}t, \mathbf{p}, 0) d\mathbf{p},$$

$$\mathbf{j}^{\text{вн}} = \sum_a e_a n_a \int \mathbf{v} f_a(\mathbf{r} - \mathbf{v}t, \mathbf{p}, 0) d\mathbf{p} \quad (30.14)$$

и являются заданными (или «внешними»), так как под интегралы входит заданная начальная функция распределения  $f_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, 0)$ .

Вторые члены в (30.13) пропорциональны полю  $E$  и поэтому называются индуцированными. Они определяются выражениями

$$q^{\text{инд}} = - \sum_a e_a^2 n_a \int d\mathbf{p} \int_0^t dt' \mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{v}(t - t'), t') \frac{\partial f_a^0}{\partial \mathbf{p}}, \quad (30.15)$$

$$\mathbf{j}^{\text{инд}} = - \sum_a e_a^2 n_a \int d\mathbf{p} \mathbf{v} \int_0^t dt' \mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{v}(t - t'), t') \frac{\partial f_a^0(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}. \quad (30.16)$$

Если подставить выражения (30.14)—(30.16) в уравнения (30.6)—(30.9) для напряженностей полей  $E$ ,  $B$ , то получим систему линейных неоднородных интегро-дифференциальных уравнений. Неоднородности будут определяться внешними зарядами и токами (30.14).

Соответствующие уравнения для  $E$  в случае кулоновской плазмы получим, подставляя выражения (30.13) для  $q$  и  $\mathbf{j}$  в уравнения (30.10), (30.11).

Исследуем систему однородных уравнений для напряженностей  $E$ ,  $B$ . Это позволит выявить электромагнитные свойства бесстолкновительной плазмы.

### § 31. Электрическая проводимость и диэлектрическая проницаемость бесстолкновительной плазмы

Выражения для электрической проводимости бесстолкновительной плазмы будем рассматривать как предельные значения более общих выражений, учитывающих столкновения, в которых частота столкновений  $\nu_a = 1/\tau_a \rightarrow 0$ . Для этого введем в уравнение (30.5) в правой части дополнительный диссипативный член  $-\nu_a f_a$ . Тогда уравнение (30.5) примет вид

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{r}} + e_a \mathbf{E} \frac{\partial f_a^0}{\partial \mathbf{p}} = -\nu_a f_a \equiv -\nu f_a. \quad (31.1)$$

Здесь считается, что  $\nu_a$  не зависит от индекса  $a$ . В окончательных выражениях  $\nu \rightarrow 0$ .

Заметим, что уравнение (31.1) не имеет смысла рассматривать при конечных значениях  $\nu$ , так как введенный нами дополнительный член нарушает при конечных  $\nu$  уравнение непрерывности. Чтобы избежать этого, надо ввести диссипативный член так, чтобы он исчезал при  $\nu \rightarrow 0$ , но не нарушал уравнения непрерывности при  $\nu \neq 0$ . Сейчас нам нет необходимости рассматривать этот вопрос здесь более подробно, так как мы хотим получить выражения для проводимости и диэлектрической проницаемости бесстолкновительной плазмы, когда  $\nu \rightarrow 0$ .

Как и для уравнения (30.5), решение уравнения (31.1) можно представить в виде суммы двух частей, как в (30.12). Мы ограничимся здесь рассмотрением лишь части, пропорциональной полю, т. е. будем рассматривать лишь индуцированные вклады в  $q$  и  $j$ .

Будем искать решение уравнений (31.1), (30.6) — (30.9) в виде

$$\begin{aligned} f_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) &= f_a(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) \exp[-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})] + \text{к. с.}, \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) \exp[-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})] + \text{к. с.}, \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}(\omega, \mathbf{k}) \exp[-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})] + \text{к. с.} \end{aligned} \quad (31.2)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (31.1), (30.6) — (30.9), получим систему уравнений для комплексных амплитуд  $f_a(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p})$ ,  $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})$ ,  $\mathbf{B}(\omega, \mathbf{k})$ :

$$-i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu) f_a = -e_a \mathbf{E} \frac{\partial f_a^0}{\partial \mathbf{p}}, \quad (31.3)$$

$$i[\mathbf{k}\mathbf{B}] = -\frac{i\omega}{c} \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (31.4)$$

$$i[\mathbf{k}\mathbf{E}] = \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}, \quad (31.5)$$

$$i(\mathbf{k}\mathbf{B}) = 0, \quad (31.6)$$

$$i(\mathbf{k}\mathbf{E}) = 4\pi q. \quad (31.7)$$

Здесь введены обозначения для фурье-компонент плотностей заряда и тока,  $q(\omega, \mathbf{k})$  и  $\mathbf{j}(\omega, \mathbf{k})$ :

$$q = \sum_a e_a n_a \int f_a(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) d\mathbf{p}, \quad (31.8)$$

$$\mathbf{j} = \sum_a e_a n_a \int \mathbf{v} f_a(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) d\mathbf{p}. \quad (31.9)$$

В силу линейности уравнений (31.3) — (31.7) векторы  $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})$ ,  $\mathbf{B}(\omega, \mathbf{k})$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E})}{k^2} + \mathbf{E} - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E})}{k^2} \equiv \mathbf{E}^{\parallel} + \mathbf{E}^{\perp}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}^{\perp}, \\ [\mathbf{k}\mathbf{E}^{\parallel}] &= 0, \quad (\mathbf{k}\mathbf{E}^{\perp}) = 0. \end{aligned} \quad (31.10)$$

Индексы  $\parallel$ ,  $\perp$  указывают соответственно на параллельность и перпендикулярность векторов по отношению к вектору  $\mathbf{k}$ . Поле  $\mathbf{E}^{\parallel}$  будем называть продольным, а поля  $\mathbf{E}^{\perp}$ ,  $\mathbf{B}^{\perp}$  — поперечными.

Соответствующее разбиение проведем для вектора  $\mathbf{j}(\omega, \mathbf{k})$ :

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^{\parallel} + \mathbf{j}^{\perp}, \quad [\mathbf{k}\mathbf{j}^{\parallel}] = 0, \quad (\mathbf{k}\mathbf{j}^{\perp}) = 0. \quad (31.11)$$



В соответствии с таким разложением векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{j}$  систему уравнений (31.3)—(31.7) можно разбить на две системы уравнений. Одна для продольного поля  $\mathbf{E}^{\parallel}$  и соответствующей (по уравнению (31.3)) части функции распределения  $f_{a1}$ . Вторая система уравнений для поперечных полей  $\mathbf{E}^{\perp}$ ,  $\mathbf{B}^{\perp}$  и соответствующей части функции  $f_{a2}$ .

Первая система уравнений имеет вид

$$-i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu) f_{a1} = -e_a \mathbf{E}^{\parallel} \frac{\partial f_a^0}{\partial p}, \quad (31.12)$$

$$i[\mathbf{k}\mathbf{E}^{\parallel}] = 0, \quad i(\mathbf{k}\mathbf{E}^{\parallel}) = 4\pi \sum_a e_a n_a \int f_{a1} dp. \quad (31.13)$$

Из уравнений (31.13) находим

$$\mathbf{E}^{\parallel} = -i \frac{\mathbf{k}}{k^2} \sum_a 4\pi e_a n_a \int f_{a1} dp. \quad (31.14)$$

Отсюда видно, что  $\mathbf{E}^{\parallel} \parallel \mathbf{k}$ .

Второе уравнение (31.13) следует из уравнения Пуассона. Из уравнения Максвелла (31.4) можно получить другое уравнение для  $\mathbf{E}^{\parallel}$ .

Выделяя в уравнении (31.4) составляющие вдоль вектора  $\mathbf{k}$ , найдем, что

$$\mathbf{E}^{\parallel} = -\frac{4\pi i}{\omega} \mathbf{j}^{\parallel} = -\frac{4\pi i}{\omega} \sum_a e_a n_a \int \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{v})}{k^2} f_{a1} dp. \quad (31.15)$$

В последнем члене учтено, что  $\mathbf{j}^{\parallel} = \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{j})/k^2$ . Вторая система уравнений для функций  $f_{a2}$ ,  $\mathbf{E}^{\perp}$ ,  $\mathbf{B}$  имеет вид

$$-i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu) f_{a2} = -e_a \mathbf{E}^{\perp} \frac{\partial f_a^0}{\partial p}, \quad (31.16)$$

$$i[\mathbf{k}\mathbf{B}] = -\frac{i\omega}{c} \mathbf{E}^{\perp} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{\perp}, \quad (31.17)$$

$$i[\mathbf{k}\mathbf{E}^{\perp}] = \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}, \quad (31.18)$$

$$i(\mathbf{k}\mathbf{B}) = 0, \quad i(\mathbf{k}, \mathbf{E}^{\perp}) = 0. \quad (31.19)$$

Исключим из уравнения (31.17) вектор  $\mathbf{B}$ . В результате получим следующее уравнение для вектора  $\mathbf{E}^{\perp}$ :

$$\begin{aligned} (\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E}^{\perp} &= \\ &= -4\pi i \omega \mathbf{j}^{\perp} = -4\pi i \omega \sum_a e_a n_a \int \left( \mathbf{v} - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{v}\mathbf{k})}{k^2} \right) f_{a2} dp. \end{aligned} \quad (31.20)$$

Здесь учтено, что  $\mathbf{j}^{\perp} = \mathbf{j} - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{j})/k^2$ .

Вернемся к уравнениям (31.12), (31.14). Исключим функцию  $f_{a1}$  из уравнения (31.14). В результате получим уравнение для  $E^{\parallel}$ . Запишем его в виде

$$\varepsilon^{\parallel}(\omega, \mathbf{k}) E^{\parallel}(\omega, \mathbf{k}) = 0. \quad (31.21)_1$$

Здесь введено обозначение для функции

$$\varepsilon^{\parallel}(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum_a \frac{4\pi e_a^2 n_a}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \partial f_a^0 / \partial \mathbf{p}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu} d\mathbf{p}, \quad (31.22)$$

которая является диэлектрической проницаемостью плазмы для продольного электрического поля — «продольной диэлектрической проницаемостью».

Действительно, уравнение Пуассона для фурье-компоненты вектора электрической индукции при отсутствии внешних зарядов имеет вид

$$i(\mathbf{kD}(\omega, \mathbf{k})) = i\varepsilon(\omega, \mathbf{k})(\mathbf{kE}(\omega, \mathbf{k})) = i\varepsilon(\omega, \mathbf{k})(\mathbf{kE}^{\parallel}) = 0. \quad (31.21)_2$$

Здесь учтено, что  $(\mathbf{kE}^{\perp}) = 0$ .

Из сравнения уравнений (31.21)<sub>1</sub>, (31.21)<sub>2</sub> и следует, что функция  $\varepsilon^{\parallel}(\omega, \mathbf{k})$  есть диэлектрическая проницаемость для продольного поля.

Если вместо уравнения (31.14) для продольного поля использовать уравнение (31.15), то получим другое выражение для функции  $\varepsilon^{\parallel}(\omega, \mathbf{k})$ :

$$\varepsilon^{\parallel}(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum_a \frac{4\pi e_a^2 n_a}{\omega k^2} \int \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})(\mathbf{k} \partial f_a^0 / \partial \mathbf{p})}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu} d\mathbf{p}. \quad (31.23)$$

Легко видеть, что в пределе  $\nu \rightarrow 0$  выражения (31.22), (31.23) отличаются лишь формой записи.

Обратимся теперь к уравнениям (31.16), (31.20) для функций  $f_{a2}$ ,  $E^{\perp}$ . Подставим функции  $f_{a2}$  из (31.16) в последний член уравнения (31.20). В результате получим выражение

$$-\omega \sum_a 4\pi e_a^2 n_a \int \frac{(\mathbf{v} - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{v})/k^2)(E^{\perp} \partial f_a^2 / \partial \mathbf{p})}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu} d\mathbf{p}. \quad (31.24)$$

Проинтегрируем в этом выражении по частям по  $\mathbf{p}$ . Дифференцирование знаменателя дает нулевой вклад. При дифференцировании числителя учтем, что  $(\mathbf{kE}^{\perp}) = 0$ . В результате выражение (31.24) примет вид

$$\omega \sum_a \frac{4\pi e_a^2 n_a}{m_a} \int \frac{f_a^0}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu} d\mathbf{p} E^{\perp}. \quad (31.25)$$

Подставим это выражение в (31.20) вместо последнего члена и запишем полученное таким путем уравнение для  $\mathbf{E}^\perp$  в виде

$$(\omega^2 \varepsilon^\perp(\omega, \mathbf{k}) - c^2 \mathbf{k}^2) \mathbf{E}^\perp(\omega, \mathbf{k}) = 0. \quad (31.26)$$

Здесь введено обозначение

$$\varepsilon^\perp(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \sum_a \frac{4\pi e_a^2 n_a}{\omega m_a} \int \frac{f_a^0(|p|)}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu} dp. \quad (31.27)$$

Из уравнения (31.26) видно, что  $\varepsilon^\perp = n^2$ , где  $n$  — показатель преломления волны с частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$ . Отсюда следует, что  $\varepsilon^\perp$  — диэлектрическая проницаемость бесстолкновительной плазмы для поперечного поля — «поперечная диэлектрическая проницаемость».

Если в системе уравнений (31.3) — (31.7) не производить разделение полей на продольную и поперечную части, а искать общую связь между векторами  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ , то эта связь будет тензорной и, следовательно, электромагнитные свойства плазмы будут характеризоваться тензором диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ . Найдем выражение для этого тензора и покажем, что он полностью определяется функциями  $\varepsilon^\parallel$ ,  $\varepsilon^\perp$ .

Подставим выражение для функции  $f_a$  из уравнения (31.3) в выражение (31.9) для плотности тока  $\mathbf{j}$ . Полученное выражение запишем в виде

$$j_i(\omega, \mathbf{k}) = \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}). \quad (31.28)$$

Здесь введено обозначение для тензора электрической проводимости бесстолкновительной плазмы

$$\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = -i \sum_a e_a^2 n_a \int \frac{v_i \partial f_a^0 / \partial p_j}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu} dp. \quad (31.29)$$

Чтобы определить тензор диэлектрической проницаемости, заметим, что при отсутствии внешних токов правую часть уравнения (31.4) можно представить, используя вектор электрической индукции  $\mathbf{D}(\omega, \mathbf{k})$  в виде  $-\frac{i\omega}{c} \mathbf{D}(\omega, \mathbf{k})$ .

Учитывая это, можно записать равенство

$$-\frac{i\omega}{c} \mathbf{D}(\omega, \mathbf{k}) \equiv -\frac{i\omega}{c} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}). \quad (31.30)$$

С другой стороны, по определению тензора  $\varepsilon_{ij}$

$$D_i = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j. \quad (31.31)$$

Из уравнений (31.28), (31.30), (31.31) находим связь тензоров  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$ :

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij}. \quad (31.32)$$

Подставляя сюда выражение (31.29) для тензора электрической проводимости, получим явное выражение для тензора диэлектрической проницаемости бесстолкновительной плазмы

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \sum_a \frac{4\pi e_a^2 n_a}{\omega} \int \frac{v_i \partial j_a / \partial p_j}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + iv} d\mathbf{p}. \quad (31.33)$$

Поскольку правая часть этого выражения зависит лишь от одного вектора  $\mathbf{k}$  (напомним, рассматривается случай, когда внешние поля отсутствуют), то тензор  $\varepsilon_{ij}$  определяется двумя функциями  $\omega$ ,  $|\mathbf{k}|$ . В качестве этих функций можно выбрать продольную  $\varepsilon^{\parallel}$  и поперечную  $\varepsilon^{\perp}$  диэлектрические проницаемости.

Действительно, представим тензор  $\varepsilon_{ij}$  в виде

$$\varepsilon_{ij} = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon^{\parallel} + \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon^{\perp}. \quad (31.34)$$

Отсюда находим выражения

$$\varepsilon^{\parallel} = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon^{\perp} = \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon_{ij}. \quad (31.35)$$

Подставив выражение (31.33) в первое из этих равенств, получим выражение, которое совпадает с (31.23), и, следовательно, функция  $\varepsilon^{\parallel}$  в (31.34) — продольная диэлектрическая проницаемость.

Подставив выражение (31.33) во второе равенство (31.35), получим

$$\varepsilon^{\perp}(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum_a \frac{2\pi e_a^2 n_a}{\omega k^2} \int \frac{[[\mathbf{k}\mathbf{v}]\mathbf{k}]}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + iv} \frac{\partial f_a^0}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p}. \quad (31.36)$$

Здесь использовано тождество

$$[[\mathbf{k}\mathbf{v}]\mathbf{k}] = v k^2 - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (31.37)$$

Выражение (31.36) лишь формой записи отличается от выражения (31.27). В этом можно убедиться, производя в (31.36) интегрирование по  $\mathbf{p}$  по частям. Таким образом, функция  $\varepsilon^{\perp}(\omega, \mathbf{k})$  в (31.34) — поперечная диэлектрическая проницаемость.

Функции  $\varepsilon^{\parallel}$ ,  $\varepsilon^{\perp}$  зависят лишь от  $|\mathbf{k}|$ , а не от самого вектора  $\mathbf{k}$  вследствие того, что функция  $f_a^0 = f_a^0(|\mathbf{p}|)$ , т. е. является функцией модуля импульса.

Используем полученные выражения для электрической проводимости и диэлектрической проницаемости для анализа волновых свойств бесстолкновительной плазмы.

## § 32. Волновые свойства бесстолкновительной плазмы

При отсутствии внешних токов и зарядов уравнения для продольного и поперечного полей — уравнения (31.21), (31.26) — являются однородными. Ненулевые решения этих уравнений имеют место для  $\omega$ ,  $\mathbf{k}$ , связанных дисперсионными уравнениями

$$\epsilon^{\parallel}(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad (32.1)$$

$$\omega^2 \epsilon^{\perp}(\omega, \mathbf{k}) - c^2 k^2 = 0. \quad (32.2)$$

Уравнение (32.1) — дисперсионное уравнение для продольных волн, а (32.2) — дисперсионное уравнение для поперечных волн в плазме.

Если характеризовать электромагнитные свойства плазмы тензором  $\epsilon_{ij}$ , то уравнения (32.1), (32.2) можно записать в виде одного дисперсионного уравнения

$$\left| \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) - \delta_{ij} k^2 + k_i k_j \right| = 0. \quad (32.3)$$

Это уравнение является более общим, чем система уравнений (32.1), (32.2). Оно справедливо и в том случае, когда плазма неизотропна, например, из-за действия внешних полей, и поэтому тензор  $\epsilon_{ij}$  не может быть представлен в виде (31.34).

Дисперсионные уравнения устанавливают связь частоты и волнового вектора  $\mathbf{k}$  собственных продольных и поперечных волн в плазме.

Если в плазме существуют волны с вещественными  $\mathbf{k}$  (такие волны существуют, например, в безграничной плазме, в плазме, находящейся в резонаторе), то дисперсионные уравнения определяют зависимость  $\omega = \omega(\mathbf{k})$ . В общем случае частота является комплексной:

$$\omega = \omega' + i\omega'' \equiv \omega' - i\gamma. \quad (32.4)$$

Тогда из дисперсионного уравнения следуют два соотношения:

$$\omega' = \omega'(\mathbf{k}), \quad (32.5)$$

$$\gamma = \gamma(\mathbf{k}), \quad (32.6)$$

определяющие зависимость частоты  $\omega'$  от  $\mathbf{k}$  — спектр собственных колебаний и зависимость от  $\mathbf{k}$  декремента затухания  $\gamma$  собственных колебаний плазмы.

Если плазма неоднородна, например, вследствие выделения границы, то возможны стационарные состояния, когда  $\omega$  — вещественная. Из дисперсионных уравнений в этом случае можно найти зависимость проекции волнового вектора на произвольную ось от  $\omega$ .

Рассмотрим случай слабого затухания, когда

$$\gamma \ll \omega'. \quad (32.7)$$

В этом случае из уравнения (32.1) следует

$$\varepsilon^{\parallel}(\omega' - i\gamma, \mathbf{k}) = \varepsilon^{\parallel}(\omega', \mathbf{k}) - i\gamma \frac{\partial \varepsilon^{\parallel}}{\partial \omega'} = 0. \quad (32.8)$$

Мы видим, что в дисперсионное уравнение входит функция  $\varepsilon^{\parallel}(\omega', \mathbf{k})$  для действительных значений  $\omega'$ ,  $\mathbf{k}$ . Она определяется выражением (31.22) (или (31.23)) и является комплексной функцией, т. е.

$$\varepsilon^{\parallel}(\omega', \mathbf{k}) = \text{Re } \varepsilon^{\parallel} + i \text{Im } \varepsilon^{\parallel}. \quad (32.9)$$

При этом из (31.22) следует, что

$$\text{Re } \varepsilon^{\parallel}(\omega', \mathbf{k}) = 1 + \sum_a \frac{4\pi e_a^2 n_a}{k^2} P \int \frac{\mathbf{k} \partial f_a^0 / \partial \mathbf{p}}{\omega' - \mathbf{k}\mathbf{v}} d\mathbf{p}, \quad (32.10)$$

$$\text{Im } \varepsilon^{\parallel}(\omega', \mathbf{k}) = - \sum_a \frac{4\pi^2 e_a^2 n_a}{k^2} \int \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \mathbf{k} \frac{\partial f_a^0}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p}. \quad (32.11)$$

Здесь использовано равенство

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} 1/(x + i\nu) = P/x - i\pi\delta(x). \quad (32.12)$$

Символ  $P$  указывает на то, что при интегрировании особенность в точке  $x = 0$  надо понимать в смысле главного значения.

При условии (32.7) в члене  $\gamma \partial \varepsilon^{\parallel} / \partial \omega'$  можно оставить (в первом приближении по  $\gamma/\omega'$ ) лишь член с  $\text{Re } \varepsilon^{\parallel}$ . В этом приближении из уравнения (32.8) получим два уравнения

$$\text{Re } \varepsilon^{\parallel}(\omega', \mathbf{k}) = 0, \quad (32.13)$$

$$\gamma = \text{Im } \varepsilon^{\parallel}(\omega, \mathbf{k}) / (\partial \text{Re } \varepsilon^{\parallel}(\omega', \mathbf{k}) / \partial \omega'). \quad (32.14)$$

Первое из этих уравнений позволяет найти зависимость  $\omega' = \omega'(\mathbf{k})$ . Зная эту зависимость, из второго уравнения находим декремент затухания  $\gamma = \gamma(\mathbf{k})$ .

Производя аналогичные преобразования в дисперсионном уравнении для поперечных волн, получим из уравнения (32.2) два равенства

$$\omega'^2 \text{Re } \varepsilon^{\perp}(\omega', \mathbf{k}) - c^2 \mathbf{k}^2 = 0, \quad (32.15)$$

$$\gamma = \omega'^2 \text{Im } \varepsilon^{\perp}(\omega', \mathbf{k}) / (\partial (\omega'^2 \text{Re } \varepsilon^{\perp}) / \partial \omega'). \quad (32.16)$$

Здесь

$$\operatorname{Re} \varepsilon^\perp = 1 - \sum_a \frac{4\pi e_a^2 n_a}{\omega' m_a} P \int \frac{f_a^0}{\omega' - k v} d p, \quad (32.17)$$

$$\operatorname{Im} \varepsilon^\perp = \sum_a \frac{4\pi^2 e_a^2 n_a}{\omega' m_a} \int \delta(\omega' - k v) f_a^0 d p. \quad (32.18)$$

Рассмотрим несколько конкретных примеров.

1. Холодная плазма ( $T_a = 0$ ). В этом случае

$$f_a^0 = \delta(p). \quad (32.19)$$

Из уравнений (32.13), (32.14) находим

$$\omega'^2 = \omega_L^2, \quad \gamma = 0. \quad (32.20)$$

Здесь введено обозначение

$$\omega_L = \sqrt{\sum_a \frac{4\pi e_a^2 n_a}{m_a}} \quad (32.21)$$

для собственной частоты плазмы — частоты Ленгмюра.

Из (32.20) следует, что в холодной плазме могут совершаться незатухающие колебания с частотой  $\omega_L$ . Частота не зависит от размера колеблющейся области (не зависит от  $k$ ).

2. Волны в электронной плазме.

$$f_e = \frac{1}{(2\pi m_e \kappa T_e)^{3/2}} \exp[-p^2/(2m_e \kappa T_e)], \quad f_i = \delta(p). \quad (32.22)$$

При условии  $\omega/k \gg v_{Te}$  (фазовая скорость волн много больше гепловой скорости электронов) из (32.13), (32.14), (32.10), (32.11) получаем следующие выражения для  $\omega'$ ,  $\gamma$ :

$$\omega'^2 = \omega_e^2 (1 + 3r_e^2 k^2), \quad (32.23)$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_e}{r_e^3 k^3} \exp[-1/(2r_e^2 k^2)]. \quad (32.24)$$

Здесь

$$\omega_e = \sqrt{4\pi e^2 n_e / m_e}, \quad r_e = v_{Te} / \omega_e = \sqrt{\kappa T_e / (4\pi e^2 n_e)}$$

— частота Ленгмюра для электронов и радиус Дебая для электронов.

Декремент затухания  $\gamma$ , определяемый выражением (32.24), называется декрементом затухания Ландау. Из выражения

(32.11) следует, что декремент затухания определяется функцией

$$(\partial f_e^0(p_x)/\partial p_x)_{v_x=\omega'/k}, \quad f_e(p_x) = \int f_e(\mathbf{p}) dp_y dp_z, \quad (32.25)$$

т. е. производной функции  $f_e(p_x)$  при значении  $v_x$ , равном фазовой скорости волны.

3. Продольные волны в неизотермической плазме, когда  $T_e \gg T_i$ , для области фазовых скоростей  $v_{Te} \gg \omega'/k \gg v_{Ti}$ . При этих условиях получаем следующие выражения для  $\omega'$  и  $\gamma$ :

$$\omega'^2 = \frac{\omega_i^2 r_e^2 k^2}{1 + r_e^2 k^2}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_i^2 r_e^2 k^2}{\sqrt{\kappa T_e/m_e} k (1 + r_e^2 k^2)^2}, \quad (32.26)$$

$\omega_i$  — частота Ленгмюра для ионов.

Из этих выражений для длинных волн ( $kr_e \ll 1$ ) находим

$$\omega'^2 = v_s^2 k^2, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{m_e}{m_i} v_s k. \quad (32.27)$$

Здесь введено обозначение

$$v_s = \sqrt{\kappa T_e/m_i} \quad (32.28)$$

для скорости звука в бесстолкновительной неизотермической плазме.

Из формул (32.27) следует, что отношение  $\gamma/\omega'$  для звуковых волн в бесстолкновительной плазме равно  $\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{m_e}{m_i} \ll 1$ .

В противоположном случае коротких волн, когда  $r_e k \gg 1$ , из (32.26) находим

$$\omega'^2 = \omega_i^2, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_i^2}{\sqrt{\kappa T_e/m_e} r_e^2 k^3}. \quad (32.29)$$

Таким образом, в плазме существуют колебания с частотой, равной частоте Ленгмюра для ионов.

4. Поперечные волны в плазме при условии  $\omega/k \gg v_T$ ,  $f_a$  — распределения Максвелла. Если  $v_T/c \ll 1$ , т. е. плазма нерелятивистская, то при этих условиях из уравнений (32.15) находим

$$\omega'^2 = \omega_L^2 + c^2 k^2, \quad \gamma = 0. \quad (32.30)$$

Равенство нулю декремента затухания поперечных волн в бесстолкновительной плазме обусловлено следующим.

Из формулы (32.18) видно, что  $\text{Im} \varepsilon^\perp$  пропорциональна функции распределения  $f_a^0(p_x)$  ( $\mathbf{x} \parallel \mathbf{k}$ ) при  $p_x = m\omega'/k$ . Но из



выражения (32.30) видно, что фазовая скорость

$$\frac{\omega'}{k} = c \sqrt{1 + \omega_L^2/c^2 k^2} > c, \text{ поэтому } (f_{(p_x)}^0)_{v_x = \omega'/k} = 0 \quad (32.31)$$

и вследствие этого равен нулю декремент затухания.

5. Экранирование статического поля в плазме. При  $\omega = 0$  и  $f_a^0$  — распределения Максвелла из (32.1), (32.10) получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$1 + 1/(r_D^2 k^2) = 0, \quad k^2 = -1/r_D^2. \quad (32.32)$$

Для одномерного случая этому дисперсионному уравнению отвечает следующее уравнение для электрического потенциала  $\varphi(x)$ :

$$d^2\varphi/dx^2 - \varphi/r_D^2 = 0. \quad (32.33)$$

Решение этого уравнения при граничных условиях  $\varphi = \varphi_0$  при  $x = 0$ ,  $\varphi = 0$  при  $x = \infty$  имеет вид

$$\varphi(x) = \varphi_0 \exp(-x/r_D). \quad (32.34)$$

Отсюда следует, что статическое поле в бесстолкновительной плазме экранируется на расстояниях порядка радиуса Дебая.

Мы рассмотрели несколько примеров, которые будут полезны для дальнейшего. Подробное исследование волновых процессов в плазме при различных условиях не входит в нашу задачу. Изучению этих процессов посвящено большое число книг [8—28].

В дальнейшем нам понадобятся еще некоторые результаты теории волновых процессов в плазме. Они будут приведены в соответствующих местах книги.

**КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ИДЕАЛЬНОЙ  
ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ**

**§ 33. Ограничения, необходимые для вывода  
кинетических уравнений**

Для кулоновской плазмы интеграл столкновений  $I_a$  согласно (26.3) определяется выражением

$$I_a(x, t) = -\frac{e_a}{n_a} \frac{\partial}{\partial p} (\overline{\delta N_a \delta E})_{x, r, t}. \quad (33.1)$$

Используем спектральное разложение для второго момента произвольных случайных функций  $A(r, t)$ ,  $B(r', t')$ :

$$\begin{aligned} (\overline{AB})_{r, t, r', t'} &= (\overline{AB})_{r, t, r-r', t-t'} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int (AB)_{\omega, k, t, r} \exp[-i\omega(t-t') + ik(r-r')] d\omega dk. \end{aligned} \quad (33.2)$$

Вследствие действительности функции  $(\overline{AB})_{r, t, r', t'}$  спектральная функция  $(AB)_{\omega, k, t, r}$  обладает свойством

$$(AB)_{\omega, k, t, r} = (AB)_{-\omega, -k, t, r}^*. \quad (33.3)$$

Из (33.2) при  $t = t'$ ,  $r = r'$  находим

$$(\overline{AB})_{r, r, t, t} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \text{Re}(AB)_{\omega, k, t, r} d\omega dk. \quad (33.4)$$

Используя это выражение, запишем интеграл столкновений (33.1) в виде

$$\begin{aligned} I_a(x, t) &= -\frac{e_a}{n_a} \frac{\partial}{(2\pi)^4} \int \text{Re}(\delta N_a \delta E)_{\omega, k, r, p, t} d\omega dk = \\ &= -\frac{e_a}{n_a} \frac{\partial}{(2\pi)^3} \int \text{Re}(\delta N_a \delta E)_{k, r, p, t} dk. \end{aligned} \quad (33.5)$$

Чтобы получить кинетические уравнения для функций  $f_a$ , надо, таким образом, выразить спектральную функцию  $(\delta N_a \delta E)_{\omega, k, r, p, t}$

через функции  $f_a$ . Чтобы найти выражение для этой спектральной плотности в поляризованном приближении (см. § 27), следует решать либо систему уравнений для вторых моментов  $\overline{(\delta N_a \delta N_b)_{x, x', t, t'}}$ , либо, что значительно проще, решать систему уравнений (27.7), (27.8) для случайных отклонений  $\delta N_a$ . Будем использовать второй путь.

Перепишем уравнения (27.7), (27.8) в явном виде для кулоновской плазмы:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}_a \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) (\delta N_a - \delta N_a^{\text{нст}}) = -e_a \delta \mathbf{E} \frac{\partial n_a f_a}{\partial \mathbf{p}},$$

$$\text{rot } \delta \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \delta \mathbf{E} = 4\pi \sum_a e_a \int \delta N_a d\mathbf{p}. \quad (33.6)$$

Корреляция флуктуаций источника определяется уравнением (27.8):

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}_a \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \overline{(\delta N_a \delta N_b)_{x, t, x', t'}}^{\text{нст}} = 0. \quad (33.7)$$

В уравнениях (33.6), (33.7) средняя сила  $F_a$  определяется выражением

$$\mathbf{F}_a = e_a \mathbf{E}_0 + \frac{e_a}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}_0] - e_a \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \sum_b \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} f_b(x', t) dx'. \quad (33.8)$$

Объединяя первый и последний члены правой части, запишем это выражение в виде

$$\mathbf{F}_a = e_a \mathbf{E} + \frac{e_a}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}_0], \quad (33.9)$$

где  $\mathbf{E}$  — суммарное среднее поле, создаваемое внешними ( $\mathbf{E}_0$ ) и внутренними источниками.

Если вместо уравнения Пуассона использовать уравнение полного тока, то уравнения для  $\delta \mathbf{E}$  следует писать в виде

$$\text{rot } \delta \mathbf{E} = 0, \quad \frac{\partial \delta \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \sum_a e_a \int \mathbf{v} \delta N_a d\mathbf{p} = 0. \quad (33.10)$$

Для определения интеграла столкновений достаточно будет знать спектральные функции для области частот  $\omega \gg \nu_a$  и области значений волновых чисел  $k \gg 1/l$ , поэтому начальное условие для уравнения (33.7) можно задавать в виде (27.10)

$$\overline{(\delta N_a \delta N_b)_{x, t, x', t'}}^{\text{нст}} \Big|_{t=t'} = n_a \delta_{ab} \delta(x - x') f_a(x', t). \quad (33.11)$$

В плазме, как и в газе, для получения замкнутых уравнений для одночастичных функций распределения  $f_a$  необходимо

использовать определенные предположения о характере релаксации корреляционных или спектральных функций.

Обозначим времена релаксации функций  $f_a$  через  $\tau_a$ , а минимальное из них через  $\tau_p$ ;  $l_p = v_T \tau_p$  — соответствующая длина. В § 29 уже говорилось о том, что  $l_p \sim r_D/\mu$ ,  $\tau_p \sim 1/\omega_e \mu$  и, следовательно, для разреженной плазмы, когда  $\mu \ll 1$ ,

$$l_p \sim r_D/\mu \gg r_D, \quad \tau_p \sim 1/\omega_e \mu \gg 1/\omega_e. \quad (33.12)$$

Поскольку интеграл столкновений выражается через спектральные функции, то сопоставим параметры  $l_p$ ,  $\tau_p$  с длиной и временем корреляции  $l_{\text{кор}}$ ,  $\tau_{\text{кор}}$  для спектральной функции.

Для состояний, близких к равновесному,  $r_{\text{кор}}$  определяется длиной, на которой происходит экранировка поля заряда в плазме, т. е. радиусом Дебая  $r_D$  (см. § 32). Это означает, что основной вклад приходится на область волновых чисел  $k > 1/r_D$ , т. е.  $k_{\text{min}} \sim 1/r_D$ .

Время корреляции для различных пространственных фурье-компонент различно, т. е.

$$\tau_{\text{кор}} \sim \tau_{\text{кор}}(k). \quad (33.13)$$

Одно из предположений при выводе кинетических уравнений для функций  $f_a$  состоит в том, что спектральные функции при  $k < k_{\text{min}}$  дают пренебрежимо малый вклад в интегралы столкновений (ср. с предположением (10.3)).

Время корреляции  $\tau_{\text{кор}}(k)$  обычно уменьшается с увеличением  $k$ , поэтому сделанное предположение означает, что при выводе интеграла столкновений следует учитывать лишь флуктуации с временами корреляции

$$\tau_{\text{кор}}(k) \ll \tau_{\text{max}} = \tau_{\text{кор}}(k_{\text{min}}). \quad (33.14)$$

Для состояний, близких к равновесному,

$$\tau_{\text{max}} \sim 1/k_{\text{min}} v_T \sim r_D/v_T \sim 1/\omega_e. \quad (33.15)$$

Используя эти оценки и неравенства (33.12), приходим к выводу, что при  $\mu \ll 1$  сделанное предположение соответствует предположениям

$$\tau_{\text{max}} = \tau_{\text{кор}}(k_{\text{min}}) \ll \tau_p, \quad 1/k_{\text{min}} \sim r_D \ll l_p. \quad (33.16)$$

Вследствие этих неравенств при решении уравнений для корреляционных функций или соответствующих уравнений для функций  $\delta N_a$ ,  $\delta E$  можно пренебречь начальными корреляциями.

Таким образом, как и в кинетической теории газов, при выводе кинетических уравнений для плазмы делается допущение, что крупномасштабные флуктуации с  $\tau_{\text{кор}} \geq \tau_p$  и  $\tau_{\text{кор}} \geq l_p$  не дают заметного вклада в кинетические уравнения.

Как и в теории газов (§ 16), установим условную границу, разделяющую области мелкомасштабных и крупномасштабных флуктуаций, исходя из условия непрерывности изменения функций вследствие столкновений заряженных частиц.

Обозначим, как и в § 16, через  $l_\phi^3$ ,  $\tau_\phi$  объем и временной интервал, которые при использовании кинетических уравнений можно рассматривать как физически бесконечно малые. При этом  $\tau_\phi \sim l_\phi/v_T$ . По аналогии с (16.2).

$$\frac{\tau_p}{nl_\phi^3} = \tau_\phi = \frac{l_\phi}{v_T}, \quad \text{отсюда} \quad l_\phi^4 = \frac{\tau_p v_T}{n} = \frac{l_p}{n}. \quad (33.17)$$

Так как  $l_p \sim r_D/\mu$  и  $\mu = 1/nr_D^3$ , то из (33.17)

$$l_\phi = \sqrt[4]{l_p/n} \sim r_D. \quad (33.18)$$

Число частиц в физически бесконечно малом объеме

$$nl_\phi^3 \sim nr_D^3 = 1/\mu \gg 1. \quad (33.19)$$

Таким образом, за условную границу, разделяющую мелкомасштабные и крупномасштабные флуктуации, можно принять  $r_D$ . Соответствующий временной интервал

$$\tau_\phi \sim r_D/v_T \sim 1/\omega_e. \quad (33.20)$$

Такой выбор границы мелкомасштабных и крупномасштабных флуктуационных процессов согласуется с условиями (33.15), (33.16).

Отказ от условия полного ослабления начальных корреляций приводит, как и в теории газов, к возможности построения кинетической теории флуктуаций (см. гл. 11).

В кинетической теории идеальной плазмы при решении уравнений для спектральных функций или соответствующих уравнений для флуктуаций  $\delta N_a$ ,  $\delta E$  можно пренебречь временным запаздыванием и пространственным изменением одночастичных функций распределения  $f_a$  на временном и пространственном интервалах  $r_D/v_T \sim 1/\omega_e$ ,  $r_D$ .

Введение границы мелкомасштабных и крупномасштабных флуктуаций позволяет определить понятия сильных и слабых, быстрых и медленных полей при решении уравнений для флуктуаций  $\delta N_a$ ,  $\delta E$ , т. е. при расчете спектральных функций, которые определяют интегралы столкновений  $I_a$ .

Электрическое поле является слабым по величине, если

$$eEl_\phi/kT \sim eEr_D/kT \ll 1. \quad (33.21)$$

Магнитное поле является слабым, если частота Лармора

$$\Omega_L = eB/mc \ll 1/\tau_\phi \sim \omega_e. \quad (33.22)$$

Электрическое поле  $E$  при выводе интегралов столкновений  $I_a$  является медленно меняющимся, если частота поля

$$\omega_0 \ll 1/\tau_\phi \sim \omega_e. \quad (33.23)$$

Если средние поля  $E, B$  слабые, т. е. выполняются условия (33.21), (33.22), то при расчете спектральных функций можно вместо (33.6), (33.7) использовать более простые уравнения [29]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) (\delta N_a - \delta N_a^{\text{нст}}) = -e_a \delta E \frac{\partial n_a^f a}{\partial \mathbf{p}}, \quad (33.24)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \overline{(\delta N_a \delta N_b)}_{x, t, x', t'}^{\text{нст}} = 0. \quad (33.25)$$

В следующих параграфах мы используем эти уравнения для расчета спектральных функций при условиях (33.15), (33.16) и найдем соответствующее выражение для интегралов столкновений  $I_a$ .

### § 34. Спектральные плотности флуктуаций источников в идеальной плазме

Найдем выражение для пространственно-временной спектральной плотности  $(\delta N_a \delta N_b)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'}^{\text{нст}}$ . Для этого воспользуемся уравнением (33.25). Чтобы сразу исключить корреляции с  $\tau_{\text{кор}} > \tau_\phi \sim 1/\omega_e$ , введем в уравнение (33.25) диссипативный член  $\Delta (\delta N_a \delta N_b)^{\text{нст}}$ . При этом  $1/\tau_p \ll \Delta \ll 1/\tau_\phi$ . Так как  $\tau_\phi$  является для функций  $f_a$  физически бесконечно малым, то в конечных результатах  $\Delta \rightarrow 0$ .

Таким образом, записываем уравнение (33.25) в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \Delta\right) \overline{(\delta N_a \delta N_b)}_{x, t, x', t'}^{\text{нст}} = 0. \quad (34.1)$$

Это уравнение решаем с начальным условием (33.11).

Согласно изложенному в предыдущем параграфе для получения кинетических уравнений надо найти спектральные плотности флуктуаций  $\delta N_a, \delta E$  с

$$\tau_{\text{кор}} \leq 1/\omega_e \ll \tau_p, \quad r_{\text{кор}} \leq r_D \ll l_p. \quad (34.2)$$

При построении кинетических уравнений для идеальной плазмы временное запаздывание и пространственное изменение функций распределения  $f_a$  не учитывается, т. е. используется нулевое приближение по параметрам  $\tau_{\text{кор}}/\tau_p, r_{\text{кор}}/l_p$ . Иными словами, при расчете спектральных плотностей можно считать функции  $f_a$  независимыми от  $\mathbf{r}$  и  $t$ .

Решение уравнения (34.1) с начальным условием (33.11) имеет вид

$$\begin{aligned} \overline{(\delta V_a \delta N_b)_{x, t, x', t'}^{\text{нст}}} &= \\ &= \delta_{ab} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v}(t - t')) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') e^{-\Delta(t-t')} n_a f_b(x', t'). \end{aligned} \quad (34.3)$$

Введем обозначения

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = \mathbf{r}, \quad t - t' = \tau. \quad (34.4)$$

Для стационарного и однородного процесса выражение (34.3) принимает вид

$$\overline{(\delta V_a \delta N_b)_{\mathbf{r}, \tau, \mathbf{p}, \mathbf{p}'}^{\text{нст}}} = n_a \delta_{ab} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}\tau) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') f_a(\mathbf{p}) e^{-\Delta\tau}. \quad (34.5)$$

Используем разложение Фурье по  $\mathbf{r}$

$$\overline{(\delta N_a \delta N_b)_{\mathbf{r}, \tau, \mathbf{p}, \mathbf{p}'}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int (\delta N_a \delta N_b)_{\mathbf{k}, \tau, \mathbf{p}, \mathbf{p}'} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}. \quad (34.6)$$

Для пространственной спектральной плотности из (34.5) получаем выражение

$$(\delta N_a \delta N_b)_{\mathbf{k}, \tau, \mathbf{p}, \mathbf{p}'}^{\text{нст}} = n_a \delta_{ab} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') e^{-\Delta\tau - i\mathbf{k}\mathbf{v}\tau} f_a(\mathbf{p}). \quad (34.7)$$

Чтобы найти пространственно-временную спектральную функцию  $\overline{(\delta V_a \delta N_b)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'}^{\text{нст}}}$ , найдем сначала функцию

$$(\delta V_a \delta N_b)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'}^+ = \int_0^{\infty} e^{i\omega\tau} (\delta N_a \delta N_b)_{\mathbf{k}, \tau, \mathbf{p}, \mathbf{p}'} d\tau, \quad (34.8)$$

а затем используем равенство

$$\begin{aligned} \overline{(\delta N_a \delta N_b)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'}} &= \\ &= (\delta N_a \delta N_b)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'}^+ + [(\delta N_a \delta N_b)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'}^+]_{\substack{a \gtrless b \\ p \gtrless p'}}, \end{aligned} \quad (34.9)$$

справедливое для стационарных процессов.

Из (34.7), (34.8) находим

$$(\delta N_a \delta N_b)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'}^{+\text{нст}} = n_a \delta_{ab} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \frac{i}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\Delta} f_a(\mathbf{p}). \quad (34.10)$$

Из (34.10), (34.9), производя предельный переход  $\Delta \rightarrow 0$ , получим искомое выражение для пространственно-временной спектральной плотности флуктуаций

$$(\delta N_a \delta N_b)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'}^{\text{нст}} = n_a \delta_{ab} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') 2\pi\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f_a(\mathbf{p}). \quad (34.11)$$

Найдем отсюда спектральные плотности  $(\delta N_a \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}'}^{\text{нст}}$   $(\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}}^{\text{нст}}$ . Для этого воспользуемся связью фурье-компонент флуктуаций  $\delta E$ ,  $\delta N_a$ , которая следует из уравнений (33.6):

$$\delta E(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{i\mathbf{k}}{k^2} \sum_a 4\pi e_a \int \delta N_a(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) d\mathbf{p}. \quad (34.12)$$

Из (34.11), (34.12) находим выражение для искоемых спектральных плотностей

$$(\delta N_a \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}}^{\text{нст}} = i \frac{\mathbf{k}}{k^2} 4\pi e_a n_a 2\pi \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f_a(\mathbf{p}), \quad (34.13)$$

$$(\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}}^{\text{нст}} = \sum_a \frac{(4\pi)^2 e_a^2 n_a}{k^2} \int 2\pi \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f_a d\mathbf{p}. \quad (34.14)$$

Мы видим, что спектральные плотности (34.11) — (34.14) носят резонансный характер (отличны от нуля лишь при  $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ ). Ширина резонанса порядка  $\Delta \sim 1/\tau_\Phi$  и стремится к нулю при  $\Delta \rightarrow 0$ .

Из формул (34.11) — (34.14) интегрированием по  $\omega$  можно получить выражение для пространственных спектральных плотностей. Например из (34.11),

$$\begin{aligned} (\delta N_a \delta N_b)_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'}^{\text{нст}} &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int (\delta N_a \delta N_b)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'}^{\text{нст}} d\omega = n_a \delta_{ab} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') f_a. \end{aligned} \quad (34.15)$$

Если подставить это выражение в формулу (34.6) и проинтегрировать по  $\mathbf{k}$ , то получим, естественно, выражение, совпадающее с начальным условием (33.11).

Используем полученные результаты, чтобы найти спектральные плотности флуктуаций  $\delta N_a$ ,  $\delta E$ .

### § 35. Спектральные плотности флуктуаций в идеальной плазме

В уравнение (33.24), как и в уравнение (34.1), введем диссипативный член  $\Delta(\delta N_a - \delta N_a^{\text{нст}})$ . Тогда для  $\delta N_a$  получим следующее уравнение:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \Delta \right) (\delta N_a - \delta N_a^{\text{нст}}) = -e_a \delta E \frac{\partial n_a f_a}{\partial \mathbf{p}}. \quad (35.1)$$

Найдем отсюда уравнение для фурье-компоненты  $\delta N_a(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p})$  в приближении, когда зависимость функций  $f_a$  от  $r$  и  $t$  не учитывается:

$$\delta N_a(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) = \delta N_a^{\text{нст}}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) - \frac{ie_a}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\Delta} \delta E(\omega, \mathbf{k}) \frac{\partial n_a f_a}{\partial \mathbf{p}}. \quad (35.2)$$



Используем соотношение (34.12) между фурье-компонентами  $\delta N_a$ ,  $\delta \mathbf{E}$ , которое следует из уравнений (33.6).

Уравнения (35.2), (34.12) составляют алгебраическую систему неоднородных уравнений для фурье-компонент  $\delta N_a$ ,  $\delta \mathbf{E}$ .

Исключая  $\delta N_a$  из (34.12) с помощью уравнения (35.2), получим уравнение для  $\delta \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})$ . Запишем его в виде

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \delta \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) = \delta \mathbf{E}^{\text{нст}}(\omega, \mathbf{k}). \quad (35.3)$$

Здесь введены обозначения

$$\delta \mathbf{E}^{\text{нст}}(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{i\mathbf{k}}{k^2} \sum_a 4\pi e_a \int \delta N_a^{\text{нст}}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) d\mathbf{p} \quad (35.4)$$

для фурье-компоненты источника флуктуаций поля и

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum_a \frac{4\pi e_a^2 n_a}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \partial f_a / \partial \mathbf{p}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\Delta} d\mathbf{p} \quad (35.5)$$

для диэлектрической проницаемости плазмы, определяющей связь флуктуаций  $\delta \mathbf{D}$ ,  $\delta \mathbf{E}$ .

Выражение (35.5) по формс совпадает с выражением (31.22) для диэлектрической проницаемости плазмы, определяющей связь средних полей  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  в приближении первых моментов. В (31.22) функция  $f_a^0$  — частное решение уравнений для функций  $f_a$ ,  $\mathbf{E}$  при полном пренебрежении корреляцией. В (35.5)  $f_a$  — функция распределения, удовлетворяющая кинетическому уравнению с учетом столкновений.

Выражение (35.5), как и (31.22), справедливо для значений  $\omega$ ,  $\mathbf{k}$  таких, что  $\omega \gg \nu_p$ ,  $k \gg 1/l_p$ .

Из уравнения (35.3) находим пространственно-временную спектральную плотность флуктуаций электрического поля в кулоновской плазме

$$(\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{(\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}}^{\text{нст}}}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} = \frac{\sum_a \frac{(4\pi)^2 e_a^2 n_a}{k^2} \int 2\pi \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f_a d\mathbf{p}}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2}. \quad (35.6)$$

Здесь использовано выражение (34.14).

Из (35.6) следует выражение для пространственной плотности флуктуаций поля в кулоновской плазме

$$(\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\mathbf{k}} = \sum_a \frac{(4\pi)^2 e_a^2 n_a}{k^2} \int \frac{f_a(\mathbf{p})}{|\varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k})|^2} d\mathbf{p}. \quad (35.7)$$

Найдем теперь выражение для спектральной плотности  $(\delta N_a \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}}$ , определяющей интеграл столкновений.

Из уравнений (35.2), (35.3) с учетом  $\delta E \parallel k$  находим

$$(\delta N_a \delta E)_{\omega, k} = - \frac{ie_a n_a}{\omega - kv + i\Delta} \frac{k}{k^2} (\delta E \delta E)_{\omega, k} k \frac{\partial f_a}{\partial p} + \frac{(\delta N_a \delta E)_{\omega, k, p}^{\text{уст}}}{\varepsilon^*(\omega, k)}. \quad (35.8)$$

Подставляя сюда выражение для функции (34.13), получим

$$(\delta N_a \delta E)_{\omega, k, p} = - \frac{ie_a n_a}{\omega - kv + i\Delta} \frac{k}{k^2} (\delta E \delta E)_{\omega, k} k \frac{\partial f_a}{\partial p} + + i \frac{k}{k^2} 4\pi e_a n_a 2\pi \delta(\omega - kv) \frac{f_a(p)}{\varepsilon^*(\omega, k)}. \quad (35.9)$$

Выделим отсюда реальную часть, которая определяет интеграл столкновений идеальной плазмы (33.5):

$$\text{Re}(\delta N_a \delta E)_{\omega, k, p} = - \pi e_a n_a \delta(\omega - kv) \frac{k}{k^2} (\delta E \delta E)_{\omega, k} k \frac{\partial f_a}{\partial p} - - \frac{4\pi e_a n_a}{k^2} k 2\pi \delta(\omega - kv) \frac{\text{Im} \varepsilon(\omega, k)}{|\varepsilon(\omega, k)|^2} f_a(p). \quad (35.10)$$

Аналогичным путем получим выражение для наиболее общей пространственно-временной спектральной плотности флуктуаций  $\delta N_a$ ,  $\delta N_b$ :

$$(\delta N_a \delta N_b)_{\omega, k, p, p'} = 2\pi \delta_{ab} \delta(\omega - kv) \delta(p - p') n_a f_a + + \frac{e_a n_a e_b n_b (\delta E \delta E)_{\omega, k}}{k^2 (\omega - kv + i\Delta) (\omega - kv' - i\Delta)} \left( k \frac{\partial f_a}{\partial p} \right) \left( k \frac{\partial f_b}{\partial p'} \right) - - \frac{4\pi e_a n_a e_b n_b}{k^2} \left[ \frac{2\pi \delta(\omega - kv')}{\omega - kv + i\Delta} \frac{1}{\varepsilon(\omega, k)} k \frac{\partial f_a}{\partial p} f_b + + \frac{2\pi \delta(\omega - kv)}{\omega - kv' - i\Delta} \frac{1}{\varepsilon^*(\omega, k)} k \frac{\partial f_b}{\partial p'} f_a \right]. \quad (35.11)$$

Функции  $\varepsilon(\omega, k)$ ,  $(\delta E \delta E)_{\omega, k}$ , входящие в выражения (35.9) — (35.11), определяются формулами (35.5), (35.6).

Из выражений (35.9) — (35.11) можно найти соответствующие выражения для пространственных спектральных плотностей флуктуаций  $\delta N_a$ ,  $\delta E$ . Приведем выражение для функции  $\text{Re}(\delta N_a \delta E)_{k, p}$ , которая согласно (33.5) определяет интеграл столкновений  $I_a$ . Для этого в (35.10) подставим выражение (35.6) и выполним интегрирование по  $\omega$ . В результате получим искомое выражение

$$\text{Re}(\delta N_a \delta E)_{k, p} = - \frac{16\pi^3 e_a n_a}{k^4} k \sum_b e_b^2 n_b \int \frac{\delta(kv - kv')}{|\varepsilon(kv, k)|^2} \left[ k \frac{\partial f_a}{\partial p} f_b - k \frac{\partial f_b}{\partial p'} f_a \right] dp'. \quad (35.12)$$

Выражения для спектральных плотностей через функции  $f_a$  зависят от координат  $r$  и времени  $t$ . Сами функции  $f_a$  удовлетворяют кинетическим уравнениям, которые будут получены в § 37. Таким образом, найденные нами спектральные плотности являются неравновесными.

Кинетические уравнения описывают процессы релаксации, в ходе которых устанавливается равновесное состояние. При отсутствии внешних полей в равновесном состоянии функции  $f_a$  — распределения Максвелла. Если в полученные формулы для спектральных плотностей в качестве  $f_a$  подставить распределение Максвелла, то получим соответствующие равновесные выражения. Исследованию равновесных спектральных плотностей для кулоновской плазмы и посвящен следующий параграф.

### § 36. Спектральные плотности флуктуаций в равновесной плазме

Рассмотрим прежде всего выражение (35.6) для спектральной плотности  $(\delta E \delta E)_{\omega, k}$ .

В равновесном состоянии выражение

$$\delta(\omega - kv) f_a = -\delta(\omega - kv) k \frac{\partial f_a}{\partial p} \frac{\kappa T}{\omega}, \quad (36.1)$$

поэтому формулу (35.6) можно записать в виде

$$(\delta E \delta E)_{\omega, k} = - \frac{\sum_a \frac{(4\pi)^2 e_a^2 n_a}{\omega k^2} 2\pi \int \delta(\omega - kv) k \frac{\partial f_a}{\partial p} dp}{|\varepsilon(\omega, k)|^2} \kappa T. \quad (36.2)$$

С другой стороны, из выражения (35.5) для  $\varepsilon(\omega, k)$  следует, что

$$\text{Im } \varepsilon(\omega, k) = - \sum_a \frac{4\pi^2 e_a^2 n_a}{k^2} \int \delta(\omega - kv) k \frac{\partial f_a}{\partial p} dp. \quad (36.3)$$

Из (36.2), (36.3) находим

$$(\delta E \delta E)_{\omega, k} = \frac{8\pi}{\omega} \frac{\text{Im } \varepsilon(\omega, k)}{|\varepsilon(\omega, k)|^2} \kappa T. \quad (36.4)$$

Сопоставляя формулы (36.4), (35.6), найдем выражение для спектральной плотности источника флуктуаций электрического поля в равновесном состоянии

$$(\delta E \delta E)_{\omega, k}^{\text{иср}} = \frac{8\pi}{\omega} \text{Im } \varepsilon(\omega, k) \kappa T. \quad (36.5)$$

Используя формулу

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma(\omega, k), \quad (36.6)$$

выразим спектральную плотность (36.5) через электрическую проводимость

$$(\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}}^{\text{ист}} = \frac{32\pi^2}{\omega^2} \text{Re } \sigma(\omega, \mathbf{k}) \kappa T. \quad (36.7)$$

Эта формула аналогична известной формуле Найквиста для спектральной плотности электродвижущей силы  $\mathcal{E}$ , эквивалентной тепловому движению:

$$(\mathcal{E})_{\omega}^2 = 2R(\omega) \kappa T. \quad (36.8)$$

Здесь  $R(\omega)$  — омическое сопротивление колебательного контура.

Из выражения (36.7) можно получить соответствующие формулы для источников флуктуаций тока и заряда. Из уравнения Пуассона следует, что флуктуации  $\delta q^{\text{ист}}$ ,  $\delta E^{\text{ист}}$  связаны равенством

$$\delta q^{\text{ист}}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{i}{4\pi} (\mathbf{k} \delta E^{\text{ист}}). \quad (36.9)$$

Из выражений (36.7), (36.9) находим спектральную плотность источников флуктуаций плотности зарядов

$$(\delta q \delta q)_{\omega, \mathbf{k}}^{\text{ист}} = \frac{2k^2}{\omega^2} \text{Re } \sigma(\omega, \mathbf{k}) \kappa T' = \frac{k^2}{2\pi\omega} \text{Im } \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \kappa T'. \quad (36.10)$$

Из уравнения сохранения заряда следует связь флуктуаций заряда и тока:

$$\omega \delta q^{\text{ист}} = \mathbf{k} \delta j^{\text{ист}} \quad \text{или} \quad 4\pi \delta j^{\text{ист}} = i\omega \delta E^{\text{ист}} \quad (36.11)$$

и, следовательно,

$$(\delta j \delta j)_{\omega, \mathbf{k}}^{\text{ист}} = 2 \text{Re } \sigma(\omega, \mathbf{k}) \kappa T. \quad (36.12)$$

Рассмотрим теперь равновесное выражение для пространственной спектральной плотности флуктуаций поля. Из формулы (36.4) находим

$$\begin{aligned} (\delta E \delta E)_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{8\pi}{\omega} \frac{\text{Im } \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} d\omega \kappa T = \\ &= \frac{4\pi}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\omega - i\Delta} + \frac{1}{\omega + i\Delta} \right] [f^-(\omega, \mathbf{k}) - f^+(\omega, \mathbf{k})] d\omega \kappa T. \end{aligned} \quad (36.13)$$

Здесь

$$f^+ = 1 - \frac{1}{\varepsilon(\omega, \mathbf{k})}, \quad f^- = 1 - \frac{1}{\varepsilon^*(\omega, \mathbf{k})} \quad (36.14)$$

— аналитические функции, соответственно в верхней и нижней полуплоскостях.

Используя формулы Коши при  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} f(\omega) = 0$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f^{(\pm)}(\omega')}{\omega - \omega' \pm i\Delta} d\omega' &= \pm f^{(\pm)}(\omega), \\ -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f^{(\mp)}(\omega')}{\omega - \omega' \pm i\Delta} d\omega' &= 0, \end{aligned} \quad (36.15)$$

получим из (36.13), (36.14) следующее выражение:

$$(\delta E \delta E)_{\mathbf{k}} = 4\pi \left(1 - \frac{1}{\varepsilon(0, \mathbf{k})}\right) \kappa T. \quad (36.16)$$

Из выражения для диэлектрической проницаемости (35.5) следует, что в равновесном случае

$$\varepsilon(0, \mathbf{k}) = 1 + \frac{1}{r_D^2 k^2}. \quad (36.17)$$

Подставляя эту формулу в (36.16), получаем окончательное выражение для пространственной спектральной плотности поля в равновесном состоянии

$$(\delta E \delta E)_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi \kappa T}{1 + r_D^2 k^2}. \quad (36.18)$$

Сравнивая формулы (35.7), (36.18), видим, что в равновесном состоянии имеет место тождество

$$\sum_a e_a^2 n_a \int \frac{f_a}{|\varepsilon(\mathbf{k}\nu, \mathbf{k})|^2} d\mathbf{p} = \sum_a e_a^2 n_a \frac{r_D^2 k^2}{1 + r_D^2 k^2}. \quad (36.19)$$

Мы воспользуемся этим тождеством в § 47.

Из формулы (35.11) для спектральной плотности  $(\delta N_a \delta N_b)_{\omega, \mathbf{k}}$  в равновесном состоянии получаем следующее выражение для пространственной спектральной плотности флуктуаций  $\delta N_a, \delta N_b$ :

$$\begin{aligned} (\delta N_a \delta N_b)_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'} &= \delta_{ab} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') n_a f_a(\mathbf{p}) - \\ &- \frac{e_a e_b n_a n_b}{\sum_c e_c^2 n_c (1 + r_D^2 k^2)} f_a(\mathbf{p}) f_b(\mathbf{p}'). \end{aligned} \quad (36.20)$$

Здесь  $f_a, f_b$  — распределения Максвелла.

Учитывая, что

$$(\delta E \delta E)_{\mathbf{k}} = \sum_a \sum_b \frac{(4\pi)^2 e_a e_b}{k^2} \int (\delta N_a \delta N_b)_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'} d\mathbf{p} d\mathbf{p}', \quad (36.21)$$

видим, что формула (36.18) сразу следует из (36.20).

Из сравнения формул (36.20), (26.11) следует выражение для фурье-компоненты корреляционной функции  $g_{ab}$  равновесной плазмы

$$g_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}') = - \frac{e_a e_b}{\sum_c e_c^2 n_c} \frac{f_a(\mathbf{p}) f_b(\mathbf{p}')}{1 + r_D^2 k^2}. \quad (36.22)$$

Найдем отсюда саму функцию  $g_{ab}(r, \mathbf{p}, \mathbf{p}')$ . Используя значение интеграла

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{1 + r_D^2 k^2} e^{i\mathbf{k}r} d\mathbf{k} = \frac{1}{4\pi r_D^2} \frac{e^{-r/r_D}}{r}, \quad (36.23)$$

получим из (36.22) выражение для равновесной корреляционной функции

$$g_{ab}(r, \mathbf{p}, \mathbf{p}') = - \frac{e_a e_b}{\kappa T} \frac{e^{-r/r_D}}{r} f_a(\mathbf{p}) f_b(\mathbf{p}'). \quad (36.24)$$

Отсюда следует, что радиус Дебая играет роль радиуса корреляции. При расстояниях  $r \gg r_D$  корреляционная функция равна нулю.

Двухчастичная функция распределения  $f_{ab}$  связана с корреляционной функцией  $g_{ab}$  равенством

$$f_{ab} = f_a f_b + g_{ab}, \quad (36.25)$$

поэтому из (36.24), (36.25) следует, что

$$f_{ab} = \left( 1 - \frac{e_a e_b}{\kappa T} \frac{e^{-r/r_D}}{r} \right) f_a(\mathbf{p}) f_b(\mathbf{p}'). \quad (36.26)$$

При  $r \gg r_D$   $g_{ab} = 0$  и  $f_{ab} = f_a f_b$ .

Из выражения (36.24) видно, что для заряженных частиц одинакового знака функция корреляции отрицательна ( $f_{ab} < f_a f_b$ ), а для частиц разного знака — положительна ( $f_{ab} > f_a f_b$ ).

Для малых расстояний  $r$  ( $r \ll r_D$ ) применение формулы (36.26) ограничено условием, при котором второй член мал по сравнению с первым. Следовательно, формула (36.26) годится лишь для расстояний

$$r \gg |e_a e_b| / \kappa T, \quad \text{когда} \quad |e_a e_b| / r \ll \kappa T, \quad (36.27)$$

т. е. расстояний, на которых потенциальная энергия частиц много меньше средней кинетической энергии. Для пространственной компоненты Фурье это условие означает, что формула (36.22) справедлива для волновых чисел

$$k \ll \kappa T / |e_a e_b|. \quad (36.28)$$

Это условие будет использовано в следующем параграфе при исследовании интегралов столкновений  $I_a$ .

Из выражения (36.3) следует, что в равновесном состоянии мнимая часть диэлектрической проницаемости определяется формулой

$$\text{Im } \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \pi \sum_a \frac{4\pi e_a^2 n_a}{k^2 \kappa T} \frac{\omega}{k} \sqrt{\frac{m_a}{2\pi \kappa T}} \exp\left(-\frac{m_a \omega^2}{2\kappa T k^2}\right). \quad (36.29)$$

Отсюда видно, что при  $\omega \neq 0$   $\text{Im } \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow 0$ . Воспользуемся равенством

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta}{\varphi^2(x) + \Delta^2} = \pi \delta(\varphi(x)), \quad \Delta > 0. \quad (36.30)$$

С учетом (36.29) для малых  $\text{Im } \varepsilon(\omega, \mathbf{k})$

$$\frac{\omega \text{Im } \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{|\omega \varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} = \pi \delta(\omega \text{Re } \varepsilon(\omega, \mathbf{k})). \quad (36.31)$$

Следовательно, при малых  $k$  выражение (36.4) для пространственно-временной спектральной плотности флуктуаций поля принимает вид

$$(\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}} = 8\pi^2 \delta(\omega \text{Re } \varepsilon(\omega, \mathbf{k})) \kappa T. \quad (36.32)$$

Мы видим, что для малых  $k$ , когда  $\text{Im } \varepsilon$  мало (область прозрачности), спектральная плотность отлична от нуля лишь для значений  $\omega, \mathbf{k}$ , связанных дисперсионным уравнением

$$\text{Re } \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 0. \quad (36.33)$$

В нулевом приближении по  $k$  из формулы (35.5) следует

$$\text{Re } \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \omega_L^2 / \omega^2. \quad (36.34)$$

Используем формулу

$$\delta(\varphi(x)) = \sum_s \frac{\delta(x - x_s)}{|\varphi'(x)|_{x=x_s}}, \quad (36.35)$$

где  $x_s$  — простые корни уравнения  $\varphi(x) = 0$ .

Из (36.32), (36.34), (36.35) находим

$$(\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}} = 4\pi^2 [\delta(\omega - \omega_L) + \delta(\omega + \omega_L)] \kappa T. \quad (36.36)$$

Таким образом, спектральная плотность отлична от нуля лишь при  $\omega = \pm \omega_L$  и не зависит от  $k$ .

Для пространственной спектральной плотности из (36.36) следует выражение

$$(\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\mathbf{k}} = 4\pi \kappa T, \quad (36.37)$$

совпадающее при малых  $k$  с выражением (36.18).

Более подробное изложение теории равновесного состояния плазмы можно найти в книгах [4, 8, 46, 47].

В §§ 33—36 развита теория мелкокомасштабных флуктуаций, для которых  $\tau_{\text{кор}} \leq 1/\omega_L$ ,  $r_{\text{кор}} \leq r_D$ . Мы увидим, что эти флуктуации определяют интегралы столкновений в кинетических уравнениях для плазмы. Наряду с мелкокомасштабными флуктуациями в неравновесной плазме могут играть заметную роль и крупномасштабные флуктуации с  $\tau_{\text{кор}} > 1/\omega_L$ ,  $r_{\text{кор}} > r_D$ . Они могут определять, например, турбулентное состояние плазмы.

Крупномасштабные флуктуации также определяют диссипативные процессы и в состояниях плазмы, далеких от равновесного, могут давать заметные вклады в интегралы столкновений и в кинетические коэффициенты (см. гл. 11).

Мы увидим (гл. 11), что спектральные плотности крупномасштабных флуктуаций сами зависят от вида тех частей интегралов столкновений, которые определяются мелкокомасштабными флуктуациями. Спектральные же плотности мелкокомасштабных корреляций, как мы видели, не зависят, естественно, от вида интеграла столкновений.

В бесстолкновительной плазме, когда характерные масштабы  $T$ ,  $L$  таковы, что  $T \ll \tau_{\text{ст}}$ ,  $L \ll l_{\text{ст}}$ , мелкокомасштабные флуктуации, очевидно, играют основную роль. В этом случае, однако, спектральные плотности могут существенно зависеть от граничных условий. Вопросы расчета спектральных плотностей флуктуаций бесстолкновительной плазмы с учетом граничных условий посвящены работы Ичимару, Якименко [51] (см. также [52, 53]).

### § 37. Кинетическое уравнение Балеску — Ленарда

Чтобы получить выражение для интеграла столкновений, подставим выражение (35.12) во второе выражение (33.5). В результате получим

$$I_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_b 2e_a^2 e_b n_b \frac{\partial}{\partial p_i} \int \frac{k_i k_j}{k^i} \frac{\delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}')}{|\varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k})|^2} \times \\ \times \left\{ \frac{\partial f_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\partial p_i} f_b(\mathbf{r}, \mathbf{p}', t) - \frac{\partial f_b(\mathbf{r}, \mathbf{p}', t)}{\partial p'_i} f_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \right\} d\mathbf{k} d\mathbf{p}'. \quad (37.1)$$

Это выражение впервые было получено в работах Ленарда и Балеску [5, 6] и поэтому называется интегралом столкновений Балеску — Ленарда.

В выражении (37.1) аргументы  $\mathbf{r}$ ,  $t$  входят как параметры. Так как пространственное изменение функций  $f_a$ ,  $f_b$  при выводе интеграла столкновений не учитывалось, то пространственные аргументы функций  $f_a$ ,  $f_b$  одинаковы.



Рассмотрим другие формы интеграла столкновений. Из первого выражения (33.5) и (35.10) следует

$$I_a(x, t) = \frac{e_a^2}{16\pi^3} \frac{\partial}{\partial p_i} \int \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \left\{ (\delta E_i \delta E_j)_{\omega, \mathbf{k}} \frac{\partial f_a}{\partial p_j} + \right. \\ \left. + \frac{8\pi \operatorname{Im} \epsilon(\omega, \mathbf{k})}{|\epsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} \frac{k_i}{k^2} f_a \right\} d\omega d\mathbf{k}. \quad (37.2)$$

Здесь тензор

$$(\delta E_i \delta E_j)_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{k_i k_j}{k^2} (\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}}. \quad (37.3)$$

Таким образом, мы выразили интеграл столкновений через спектральную плотность флуктуаций поля и диэлектрическую проницаемость. Эти функции выражаются через функции распределения  $f_a$  по формулам (35.6), (35.5).

Представление интеграла столкновений в виде (37.2) очень удобно при рассмотрении кинетического уравнения для релятивистской плазмы (§ 39) и при учете эффектов неидеальности плазмы (гл. 9).

Интеграл столкновений можно выразить через диффузионный оператор в пространстве импульсов

$$I_a = \frac{\partial}{\partial p_i} D_{ij}^{(a)} \frac{\partial f_a}{\partial p_j} + \frac{\partial}{\partial p_i} (A_i^{(a)} f_a). \quad (37.4)$$

Коэффициенты диффузии и трения, например, для формы (37.2) определяются выражениями

$$D_{ij}^{(a)}(\mathbf{p}) = \frac{e_a^2}{16\pi^3} \int \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) (\delta E_i \delta E_j)_{\omega, \mathbf{k}} d\omega d\mathbf{k}, \quad (37.5)$$

$$A_i^{(a)}(\mathbf{p}) = \frac{e_a^2}{2\pi^2} \int \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \frac{k_i}{k^2} \frac{\operatorname{Im} \epsilon(\omega, \mathbf{k})}{|\epsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} d\omega d\mathbf{k}. \quad (37.6)$$

Уравнения (26.3) с интегралами столкновений (37.1) (или (37.2), (37.4)) составляют систему кинетических уравнений для плазмы в поляризованном приближении. Интегралы столкновений Балеску — Ленарда в форме (37.1) впервые были получены путем решения интегральных уравнений для корреляционных функций  $g_{ab}$  (27.4) (см. [5, 6, 8, 10]).

Рассмотрим общие свойства интегралов столкновений Балеску — Ленарда.

Покажем, что при подстановке в интегралы столкновений  $I_a$  распределений Максвелла они обращаются в нуль. Это следует из того, что в равновесном случае выражение, стоящее под

интегралом в (37.1):

$$k_j \delta(\mathbf{kv} - \mathbf{kv}') \left\{ \frac{\partial f_a}{\partial p_j} f_b - \frac{\partial f_b}{\partial p_j'} f_a \right\} = - \frac{(\mathbf{kv} - \mathbf{kv}')}{\kappa T} \delta(\mathbf{kv} - \mathbf{kv}') f_a f_b,$$

так как по определению  $\delta(x)$

$$x \delta(x) = 0. \quad (37.7)$$

Таким образом, в равновесном состоянии распределение Максвелла является решением системы кинетических уравнений.

Рассмотрим интеграл

$$I(\mathbf{r}, t) = \sum_a n_a \int \varphi_a(\mathbf{p}) I_a(\mathbf{x}, t) d\mathbf{p}, \quad (37.8)$$

где  $\varphi_a(\mathbf{p})$  — пока произвольная функция.

Подставим в (37.8) выражение (37.1), проинтегрируем по частям по  $\mathbf{p}$  и симметризуем по  $a, \mathbf{p}; b, \mathbf{p}'$ . Тогда

$$I(\mathbf{r}, t) = \sum_{ab} e_a^2 e_b^2 n_a n_b \int \left( \frac{\partial \varphi_b}{\partial p_i'} - \frac{\partial \varphi_a}{\partial p_i} \right) \frac{k_i k_j}{k^4} \frac{\delta(\mathbf{kv} - \mathbf{kv}')}{|\mathbf{e}(\mathbf{kv}, \mathbf{k})|^2} \times \\ \times \left\{ \frac{\partial f_a}{\partial p_j} f_b - \frac{\partial f_b}{\partial p_j'} f_a \right\} d\mathbf{k} d\mathbf{p} d\mathbf{p}'. \quad (37.9)$$

Отсюда следует, что

$$I(\mathbf{r}, t) = \sum_a n_a \int \varphi_a(\mathbf{p}) I_a(\mathbf{x}, t) d\mathbf{p} = 0 \text{ при } \varphi_a = 1, \mathbf{p}, \mathbf{p}^2/2m_a. \quad (37.10)$$

Выполнение первых двух равенств очевидно. При подстановке  $\varphi_a = \mathbf{p}^2/2m_a$  надо использовать равенство (37.7).

Свойства интегралов столкновений  $I_a$  (37.10) для идеальной плазмы аналогичны свойствам (11.5) для идеального газа.

Покажем, что при учете корреляций, определяющих интегралы столкновений, полная энтропия плазмы

$$S(t) = - \kappa \sum_a n_a \int f_a \ln f_a d\mathbf{x} \quad (37.11)$$

возрастает и при достижении равновесного состояния остается неизменной.

Для этого в (37.8) подставим функцию

$$\varphi_a = - \kappa \ln f_a \quad (37.12)$$

и введем обозначение для вектора

$$\mathbf{A} = \partial \ln f_a / \partial \mathbf{p} - \partial \ln f_b / \partial \mathbf{p}'. \quad (37.13)$$

Тогда выражение (37.8) примет вид

$$I(\mathbf{r}, t) = \kappa \sum_{ab} e_a^2 e_b^2 n_a n_b \int \frac{(kA)^2}{k^4 |e(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k})|^2} \delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}') f_a f_b d\mathbf{k} d\mathbf{p} d\mathbf{p}' \geq 0, \quad (37.14)$$

так как подынтегральное выражение положительно.

Знак равенства нулю имеет место, когда вектор

$$\partial \ln f_a / \partial \mathbf{p} - \partial \ln f_b / \partial \mathbf{p}' = \alpha (\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (37.15)$$

где  $\alpha$  — константа, не зависящая от индексов  $a, b$ .

При условии (37.15) не только интеграл  $I(\mathbf{r}, t)$ , но и сами интегралы столкновений (из-за равенства  $(\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}') \delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}') = 0$ ) обращаются в нуль.

Решение уравнения (37.15) имеет вид

$$\ln f_a(\mathbf{p}) = 1/2 \alpha p^2 + \beta p + \gamma, \quad (37.16)$$

откуда для  $f_a(\mathbf{p})$  следует распределение Максвелла

$$f_a(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi m_a \kappa T)^{3/2}} \exp \left[ \frac{-(\mathbf{p} - m_a \mathbf{u}_a)^2}{2m_a \kappa T} \right]. \quad (37.17)$$

Используя свойство (37.14), с помощью кинетического уравнения нетрудно установить, что

$$dS/dt \geq 0. \quad (37.18)$$

Энтропия достигает максимального значения, когда функции распределения  $f_a(x, t)$  становятся равновесными, т. е. устанавливаются распределения Максвелла для всех компонент плазмы с одинаковыми  $T$  и  $\mathbf{u}$ .

Заметим, что интеграл (37.1) при интегрировании по  $k$  от 0 до  $\infty$  содержит логарифмическую расходимость при больших  $k$ . Действительно, при  $k \rightarrow \infty$  ( $k \gg 1/r_D$ )  $\epsilon(\omega, \mathbf{k}) \rightarrow 1$  и подынтегральное выражение (см. следующий параграф) будет  $\sim 1/k$ . При интегрировании по величине  $k$  это дает  $\ln k$ .

Причина появления этой расходимости связана с тем, что на малых расстояниях ( $r \ll r_D$ ) поляризационное приближение совпадает с приближением теории возмущений по параметру взаимодействия  $\xi = e^2/r_{cp} \kappa T$ . Полученные формулы справедливы поэтому лишь при условиях (36.27), (36.28). Границу применимости при интегрировании по  $k$  можно приближенно определить из условия

$$k_{\max} \sim \kappa T / |e_a e_b|. \quad (37.19)$$

Поскольку расходимость при больших  $k$  носит логарифмический характер, то точное положение границы области интегрирования мало влияет на результат.

Однако при учете эффектов неидеальности положение меняется, так как дополнительные вклады в интегралах столкновений содержат более сильные расходимости на малых расстояниях (больших  $k$ ).

В то же время вклад взаимодействия частиц на малых расстояниях в термодинамические функции оказывается существенным. Вследствие этого в кинетической теории неидеальной плазмы надо более точно учитывать вклад взаимодействия заряженных частиц на малых ( $r \ll r_D$ ) расстояниях в интегралы столкновений (см. §§ 55, 56 гл. 9).

### § 38. Кинетическое уравнение Ландау

Интеграл столкновений Балеску — Ленарда весьма сложен, так как зависимость от функций распределения  $f_a, f_b$  входит не только непосредственно (через члены в  $\{ \}$  в (37.1)), но и через диэлектрическую проницаемость, учитывающую влияние поляризации среды. В связи с этим большую роль играют более простые выражения для интегралов столкновений, но которые тем не менее обладают теми же основными свойствами, что и интеграл столкновений Балеску — Ленарда.

Примером такого более простого интеграла столкновений может служить интеграл столкновений Ландау. Для перехода от интеграла столкновений Балеску — Ленарда к интегралу столкновений Ландау можно поступить следующим образом.

В выражении (37.1) поляризация определяется диэлектрической проницаемостью  $\epsilon(\omega, \mathbf{k})$  на частоте  $\mathbf{k}\mathbf{v}$ , поэтому можно говорить о том, что в (37.1) учитывается динамическая поляризация плазмы. Будем учитывать лишь статическую поляризацию плазмы. Для этого заменим  $\epsilon(\omega, \mathbf{k})$  в (37.1) на  $\epsilon(0, \mathbf{k})$  и  $f_a$  — на распределение Максвелла. Тогда согласно (36.17)

$$\epsilon(0, \mathbf{k}) = 1 + \frac{1}{r_D^2 k^2}. \quad (38.1)$$

Поскольку диэлектрическая проницаемость стоит в выражении (37.1) в знаменателе, то при интегрировании по величине  $k$  основной вклад будет приходиться на область значений  $k > 1/r_D$ . На этом основании в интеграле столкновений (37.1) положим  $\epsilon = 1$ , но будем производить интегрирование по области значений

$$1/r_D < k < k_{\max} = \kappa T / |e_a e_b|. \quad (38.2)$$

Тогда выражение для интеграла столкновений примет вид

$$I_a = \sum_b n_b \frac{\partial}{\partial p_i} \int Q_i^{(ab)} \left\{ \frac{\partial f_b}{\partial p_i} f_b - \frac{\partial f_b}{\partial p_j} f_a \right\} d\mathbf{p}'. \quad (38.3)$$

Здесь для удобства записи введено обозначение

$$Q_{ij}^{(ab)} = 2e_a^2 e_b^2 \int \frac{k_i k_j}{k^3} \delta(kv - kv') dk. \quad (38.4)$$

Область интегрирования по величине  $k$  определяется неравенствами (38.2).

Выполняя в (38.4) интегрирование по  $k$ , получим с учетом (38.2) следующее выражение:

$$Q_{ij}^{(ab)} = \frac{2\pi e_a^2 e_b^2}{|v - v'|^3} \ln \frac{r_D k T}{|e_a e_b|} [(v - v')^2 \delta_{ij} - (v - v')_i (v - v')_j]. \quad (38.5)$$

Уравнения для функций распределения заряженных частиц плазмы с интегралами столкновений (38.3), (38.4) и называются кинетическими уравнениями Ландау.

Впервые [1] это кинетическое уравнение было получено из уравнения Больцмана для функций распределения  $f_a$  заряженных частиц. Однако уравнения Больцмана учитывают лишь парные столкновения заряженных частиц. В то же время в плазме, как мы знаем, в сфере действия заряженной частицы находится одновременно большое число частиц. Поэтому использование уравнений Больцмана для вывода кинетических уравнений Ландау не является последовательным. Это проявляется, в частности, в том, что при получении кинетических уравнений для плазмы из уравнений Больцмана в выражении (38.4) появляется логарифмическая расходимость и приходится делать дополнительные предположения об ограничении области интегрирования при малых  $k$  ( $k_{\min} \sim 1/r_D$ ).

Использование интеграла столкновений Ландау позволяет значительно упростить многие расчеты, например, вычисление коэффициентов вязкости и теплопроводности, электрической проводимости, определяемой столкновениями заряженных частиц, и т. д.

Однако замена интеграла столкновений Балеску — Ленарда более простым интегралом столкновений Ландау возможна не всегда. Для сильно неравновесных состояний, в которых вклад спектральных плотностей для области прозрачности (малые значения  $k$ ) значителен, учет динамической поляризации оказывается существенным и необходимо использовать интегралы столкновений Балеску — Ленарда. Некоторые примеры такого рода разобраны в работах [10, 30].

В заключение настоящего параграфа произведем оценку частот электрон-электронных  $\nu_{ee}$  и ион-ионных  $\nu_{ii}$  столкновений.

Для электрон-ионной плазмы ( $a = e, i$ ) интегралы столкновений  $I_e, I_i$  можно представить в виде

$$I_e = I_{ee} + I_{ei}, \quad I_i = I_{ii} + I_{ie}, \quad (38.6)$$

где  $I_{ee}$  — вклад, обусловленный столкновениями электронов с электронами, а  $I_{ei}$  — электронов с ионами, в полный интеграл столкновений электронов. Аналогично  $I_{ii}$  — вклад в  $I_i$ , обусловленный столкновениями ионов с ионами, а  $I_{ie}$  — ионов с электронами.

Выражение (38.3) определяет все четыре интеграла столкновений  $I_{ee}$ ,  $I_{ei}$ ,  $I_{ie}$ ,  $I_{ii}$ . Оценим соответствующие частоты и времена столкновений. Начнем с оценки частоты электрон-электронных столкновений  $\nu_{ee} = 1/\tau_{ee}$ .

Полагая в выражении для  $I_{ee}$   $\rho \sim m_e v_T$ , получим из (38.3), (38.5)

$$I_{ee} \sim \nu_{ee} f_e = \frac{1}{\tau_{ee}} f_e, \quad (38.7)$$

где

$$\nu_{ee} \sim \frac{e^4 n}{m^{1/2} (\kappa T)^{3/2}} L, \quad (38.8)$$

$L = \ln r_D \kappa T / |e_a e_b|$  — «кулоновский логарифм».

Представим это выражение в ином виде. Учитывая, что  $r_D = \sqrt{\frac{\kappa T}{8\pi e^2 n}}$ ,  $\omega_e = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_e}{m_e}}$ ,  $\mu = \frac{1}{nr_D^3}$ , получим для  $\nu_{ee}$  следующее выражение:

$$\nu_{ee} \sim \omega_e \mu \quad (l_{ee} = v_T / \nu_{ee} \sim r_D / \mu). \quad (38.9)$$

Так как для разреженной плазмы плазменный параметр  $\mu \ll 1$ , то частота столкновений  $\nu_{ee}$  много меньше частоты Ленгмюра электронов плазмы, а соответствующая длина свободного пробега много больше радиуса Дебая.

Для оценки величины  $\nu_{ii}$  мы можем воспользоваться выражением (38.8), заменив в нем  $m_e \rightarrow m_i$  (считаем, что  $T_e \approx T_i$ , т. е. плазма изотермична). Тогда

$$\nu_{ii} \sim \frac{e^4 n}{m_i^{1/2} (\kappa T)^{3/2}} L \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \nu_{ee} \ll \nu_{ee}. \quad (38.10)$$

Подставляя сюда выражение (38.9) для  $\nu_{ee}$ , получим

$$\nu_{ii} \sim \sqrt{m_e/m_i} \omega_e \mu = \omega_i \mu. \quad (38.11)$$

Здесь использовано выражение  $\omega_i = \sqrt{4\pi e^2 n/m_i}$  для частоты Ленгмюра ионов.

Перекрестные электрон-ионные столкновения определяют различные процессы, например, выравнивание разности скоростей  $u_e$ ,  $u_i$ , разности температур  $T_e$ ,  $T_i$ , электрическую проводимость.

Процесс выравнивания скоростей  $u_e$ ,  $u_i$  происходит за время порядка  $\tau_{ee}$ , т. е. для него характерной является частота  $\nu_{ee}$ . Эта

же частота столкновений входит и в выражение для электрической проводимости (см. § 48). Процесс выравнивания температур определяется частотой столкновений электронов и ионов  $\nu_{ei}^{(T)}$ . Индекс  $T$  у  $\nu_{ei}$  указывает на то, что речь идет о выравнивании температур:

$$\nu_{ei}^{(T)} \sim \frac{m_e}{m_i} \nu_{ee} \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \nu_{ii}. \quad (38.12)$$

Вследствие того, что  $m_e \ll m_i$ , имеют место неравенства

$$\nu_{ee} \gg \nu_{ii} \gg \nu_{ei}^{(T)}, \quad \tau_{ee} \ll \tau_{ii} \ll \tau_{ei}^{(T)}. \quad (38.13)$$

Таким образом, имеются несколько различных стадий в процессах релаксации в плазме, обусловленных столкновениями. За время  $\sim \tau_{ee}$  устанавливается локальное равновесие для электронов, за время  $\tau_{ii} \gg \tau_{ee}$  — локальное равновесие ионов. При этом распределения Максвелла для электронов и ионов могут иметь разные температуры  $T_e, T_i$ . Процесс выравнивания температур наиболее медленный. Он происходит за время порядка  $\tau_{ei}^{(T)} \gg \tau_{ee}, \tau_{ii}$ .

### § 39. Спектральные плотности флуктуаций в релятивистской плазме

Для расчета корреляций флуктуаций фазовой плотности  $\delta N_a$  и напряженностей электромагнитного поля  $\delta \mathbf{E}, \delta \mathbf{B}$  используем систему уравнений (27.7), (26.20) — (26.23).

Рассмотрим сначала случай пространственно однородной и изотропной плазмы, когда функция распределения

$$\hat{f}_a = \hat{f}_a(|\mathbf{p}|, t). \quad (39.1)$$

В этом приближении в уравнении (27.7) член с

$$\frac{e_a}{c} [\mathbf{v} \delta \mathbf{B}] \frac{\partial \hat{f}_a(|\mathbf{p}|, t)}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (39.2)$$

Добавляя в (27.7) диссипативный член  $\Delta(\delta N_a - \delta N_a^{\text{нст}})$ , получим из (27.7) уравнение, совпадающее с (35.1). Вследствие этого для фурье-компоненты  $\delta N_a(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p})$  мы снова можем использовать уравнение (35.2)

$$\delta N_a(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) = \delta N_a^{\text{нст}} - \frac{ie_a n_a}{\omega - k v + i\Delta} \delta \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) \frac{\partial \hat{f}_a}{\partial \mathbf{p}}. \quad (39.3)$$

Отличие от уравнения (35.2) состоит в том, что здесь  $\delta \mathbf{E} = \delta \mathbf{E}^{\parallel} + \delta \mathbf{E}^{\perp}$ , т. е.  $\delta \mathbf{E}$  имеет продольную и поперечную, по отношению к вектору  $\mathbf{k}$ , составляющие.

Из системы уравнений (26.20) — (26.23) находим уравнения для фурье-компонент флуктуаций поля  $\delta\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})$ ,  $\delta\mathbf{B}(\omega, \mathbf{k})$ :

$$i[\mathbf{k} \delta\mathbf{B}] = -\frac{i\omega}{c} \delta\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \sum_a e_a \int \mathbf{v} \delta N_a d\mathbf{p}, \quad (39.4)$$

$$i[\mathbf{k} \delta\mathbf{E}] = \frac{i\omega}{c} \delta\mathbf{B}, \quad (39.5)$$

$$i(\mathbf{k} \delta\mathbf{B}) = 0, \quad (39.6)$$

$$i(\mathbf{k} \delta\mathbf{E}) = 4\pi \sum_a e_a \int \delta N_a d\mathbf{p}. \quad (39.7)$$

В силу линейности этой системы уравнений ее можно разбить на две системы, описывающие соответственно поперечные  $\delta\mathbf{E}^\perp$ ,  $\delta\mathbf{B}$  и продольные  $\delta\mathbf{E}^\parallel$  флуктуации в плазме. Для этого представим векторы  $\delta\mathbf{E}$ ,  $\delta\mathbf{j}$  в виде

$$\delta\mathbf{E} = \delta\mathbf{E}^\parallel + \delta\mathbf{E}^\perp, \quad [\mathbf{k} \delta\mathbf{E}^\parallel] = 0, \quad (\mathbf{k} \delta\mathbf{E}^\perp) = 0, \quad (39.8)$$

$$\delta\mathbf{j} = \delta\mathbf{j}^\parallel + \delta\mathbf{j}^\perp, \quad [\mathbf{k} \delta\mathbf{j}^\parallel] = 0, \quad (\mathbf{k} \delta\mathbf{j}^\perp) = 0. \quad (39.9)$$

Для продольного поля  $\delta\mathbf{E}^\parallel$  из системы (39.4) — (39.7) следуют уравнения

$$i[\mathbf{k} \delta\mathbf{E}^\parallel] = 0, \quad i(\mathbf{k} \delta\mathbf{E}^\parallel) = 4\pi \sum_a e_a \int \delta N_a d\mathbf{p} \quad (39.10)$$

или, при использовании уравнения полного тока,

$$\begin{aligned} i[\mathbf{k} \delta\mathbf{E}^\parallel] = 0, \quad -i\omega \delta\mathbf{E}^\parallel = -4\pi\mathbf{j}^\parallel = \\ = -4\pi \sum_a e_a \int \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{v})}{k^2} \delta N_a d\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (39.11)$$

Уравнения для поперечного поля имеют вид

$$i[\mathbf{k} \delta\mathbf{B}] = -\frac{i\omega}{c} \delta\mathbf{E}^\perp + \frac{4\pi}{c} \sum_a e_a \int \frac{[[\mathbf{k}\mathbf{v}]\mathbf{k}]}{k^2} \delta N_a d\mathbf{p}, \quad (39.12)$$

$$i[\mathbf{k} \delta\mathbf{E}^\perp] = \frac{i\omega}{c} \delta\mathbf{B}, \quad i(\mathbf{k} \delta\mathbf{B}) = 0, \quad i(\mathbf{k} \delta\mathbf{E}^\perp) = 0. \quad (39.13)$$

В уравнении (39.12) использовано тождество

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{A})}{k^2} + \mathbf{A} - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{A})}{k^2} = \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{A})}{k^2} + \frac{[[\mathbf{k}\mathbf{A}]\mathbf{k}]}{k^2} = \mathbf{A}^\parallel + \mathbf{A}^\perp. \quad (39.14)$$



Исключая из уравнений (39.12), (39.13)  $\delta \mathbf{B}$ , получим уравнение для  $\delta \mathbf{E}^\perp$ :

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \delta \mathbf{E}^\perp = -4\pi i \omega \delta \mathbf{j}^\perp = -4\pi i \omega \sum_a e_a \int \left[ \frac{[\mathbf{k}\mathbf{v}]\mathbf{k}}{k^2} \right] \delta N_a d\mathbf{p}, \quad (39.15)$$

$$\delta \mathbf{B} = \frac{c}{\omega} [\mathbf{k} \delta \mathbf{E}^\perp]. \quad (39.16)$$

Из уравнений (39.11), (39.15) следует, что флуктуации продольного и поперечного поля определяются соответствующими составляющими  $\delta j^\parallel$ ,  $\delta j^\perp$ . Выразим  $\delta j^\parallel$ ,  $\delta j^\perp$  через флуктуации источника. Для этого подставим выражение (39.3) в выражение для  $\delta j$ :

$$\delta j(\omega, \mathbf{k}) = \sum_a e_a \int \mathbf{v} \delta N_a(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) d\mathbf{p} \quad (39.17)$$

и полученное таким путем выражение запишем в виде

$$\delta j_i = \sigma_{ij} \delta E_j + \delta j_i^{\text{нст}}. \quad (39.18)$$

Здесь

$$\sigma_{ij} = -i \sum_a e_a^2 n_a \int \frac{v_i \partial f_a / \partial p_j}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\Delta} d\mathbf{p} \quad (39.19)$$

— тензор электрической проводимости плазмы, определяющий связь флуктуаций  $\delta j$ ,  $\delta \mathbf{E}$ ,

$$\delta j^{\text{нст}} = \sum_a e_a \int \mathbf{v} \delta N_a^{\text{нст}}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) d\mathbf{p} \quad (39.20)$$

— фурье-компонента источника флуктуаций тока.

Выражение (39.19) по форме совпадает с выражением (31.29) для тензора проводимости бесстолкновительной плазмы. По аналогии с (31.32) можно ввести тензор диэлектрической проницаемости

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij} = \delta_{ij} + \sum_a \frac{4\pi e_a^2 n_a}{\omega} \int \frac{v_i \partial f_a / \partial p_j}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\Delta} d\mathbf{p}. \quad (39.21)$$

Отличие выражений (39.19), (39.21) от соответствующих выражений (31.29), (31.33) в том, что здесь функция  $f_a$  определяется кинетическим уравнением, учитывающим столкновения частиц (§ 38), а в § 31  $f_a^0$  — частное решение кинетических уравнений для бесстолкновительной плазмы.

Для изотропной плазмы тензоры  $\sigma_{ij}$ ,  $\epsilon_{ij}$  можно представить в виде (ср. с (31.34))

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \frac{k_i k_j}{k^2} \sigma^{\parallel} + \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \sigma^{\perp}, \\ \epsilon_{ij} &= \frac{k_i k_j}{k^2} \epsilon^{\parallel} + \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \epsilon^{\perp}.\end{aligned}\quad (39.22)$$

Отсюда находим выражения для  $\epsilon^{\parallel}$ ,  $\epsilon^{\perp}$ :

$$\epsilon^{\parallel} = \frac{k_i k_j}{k^2} \epsilon_{ij}, \quad \epsilon^{\perp} = \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \epsilon_{ij}, \quad (39.23)$$

и соответствующие выражения для  $\sigma^{\parallel}$ ,  $\sigma^{\perp}$ .

Из (39.19), (39.21), (39.23) находим выражения для продольной и поперечной диэлектрических проницаемостей

$$\epsilon^{\parallel}(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum_a \frac{4\pi e_a^2 n_a}{k^2 \omega} \int \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v}) \mathbf{k} \partial f_a / \partial \mathbf{p}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\Delta} d\mathbf{p}, \quad (39.24)$$

$$\epsilon^{\perp}(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum_a \frac{2\pi e_a^2 n_a}{k^2 \omega} \int \frac{[[\mathbf{k}\mathbf{v}] \mathbf{k}] \partial f_a / \partial \mathbf{p}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\Delta} d\mathbf{p}. \quad (39.25)$$

Выражение (39.24) лишь формой записи отличается от соответствующего выражения (35.5) для диэлектрической проницаемости кулоновской плазмы.

Вернемся к выражению (39.18) для  $\delta j(\omega, \mathbf{k})$ . Подставляя в него выражение (39.22) для  $\sigma_{ij}$ , найдем выражения для продольной и поперечной компонент:

$$\delta j^{\parallel} = \sigma^{\parallel} \delta E^{\parallel} + \delta j^{\parallel \text{нст}}, \quad \delta j^{\perp} = \sigma^{\perp} \delta E^{\perp} + \delta j^{\perp \text{нст}}. \quad (39.26)$$

Здесь

$$\delta j^{\parallel \text{нст}} = \frac{\mathbf{k} (\mathbf{k} \delta j^{\text{нст}})}{k^2}, \quad \delta j^{\perp \text{нст}} = \frac{[[\mathbf{k} \delta j^{\text{нст}}] \mathbf{k}]}{k^2}. \quad (39.27)$$

Теперь мы уже можем найти выражения для продольной и поперечной составляющих вектора  $\delta E$ . Для этого подставим выражение (39.26) в уравнения (39.10) и (39.15). В результате получим

$$\delta E^{\parallel} = \frac{\delta E^{\parallel \text{нст}}}{\epsilon^{\parallel}(\omega, \mathbf{k})}, \quad \delta E^{\perp} = \frac{\omega^2 \delta E^{\perp \text{нст}}}{\omega^2 \epsilon^{\perp} - c^2 k^2}. \quad (39.28)$$

Здесь использованы обозначения

$$\delta E^{\parallel \text{нст}} = -\frac{4\pi i}{\omega} \delta j^{\parallel \text{нст}}, \quad \delta E^{\perp \text{нст}} = -\frac{4\pi i}{\omega} \delta j^{\perp \text{нст}} \quad (39.29)$$

для источников флуктуаций продольной и поперечной составляющих  $\delta E(\omega, \mathbf{k})$ .

Из (39.28) находим

$$(\delta E^{\parallel} \delta E^{\parallel})_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{\sum_a \frac{(4\pi)^2 e_a^2 n_a}{k^2} \int 2\pi \delta(\omega - \mathbf{k}v) f_a dp}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2}, \quad (39.30)$$

$$(\delta E^{\perp} \delta E^{\perp})_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{\sum_a \frac{(4\pi)^2 e_a^2 n_a}{k^2} \omega^2 \int 2\pi \delta(\omega - \mathbf{k}v) [k v]^2 f_a dp}{|\omega^2 \varepsilon^{\perp}(\omega, \mathbf{k}) - c^2 k^2|^2}. \quad (39.31)$$

Здесь использованы выражения для спектральных плотностей источников флуктуаций поля

$$(\delta E^{\parallel} \delta E^{\parallel})_{\omega, \mathbf{k}}^{\text{ист}} = \sum_a \frac{(4\pi)^2 e_a^2 n_a}{k^2} \int 2\pi \delta(\omega - \mathbf{k}v) f_a dp, \quad (39.32)$$

$$(\delta E^{\perp} \delta E^{\perp})_{\omega, \mathbf{k}}^{\text{ист}} = \sum_a \frac{(4\pi)^2 e_a^2 n_a}{k^2} \int 2\pi \delta(\omega - \mathbf{k}v) \frac{[k v]^2}{\omega^2} f_a dp, \quad (39.33)$$

которые следуют из выражений (39.29), (39.27), (39.20) и выражения (34.11) для спектральной плотности  $(\delta N_a \delta N_b)_{\omega, \mathbf{k}, p, p'}^{\text{ист}}$ .

В изотропной плазме продольная и поперечная составляющие вектора  $\delta E$  не коррелируют между собой, поэтому тензор  $(\delta E_i \delta E_j)_{\omega, \mathbf{k}}$  можно представить в виде

$$(\delta E_i \delta E_j)_{\omega, \mathbf{k}} = (\delta E_i^{\parallel} \delta E_j^{\parallel})_{\omega, \mathbf{k}} + (\delta E_i^{\perp} \delta E_j^{\perp})_{\omega, \mathbf{k}}, \quad (39.34)$$

где

$$\begin{aligned} (\delta E_i^{\parallel} \delta E_j^{\parallel})_{\omega, \mathbf{k}} &= \frac{k_i k_j}{k^2} (\delta E^{\parallel} \delta E^{\parallel})_{\omega, \mathbf{k}}, \\ (\delta E_i^{\perp} \delta E_j^{\perp})_{\omega, \mathbf{k}} &= \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) (\delta E^{\perp} \delta E^{\perp})_{\omega, \mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (39.35)$$

Таким образом, две спектральные плотности (39.30), (39.31) в изотропной плазме полностью определяют тензор  $(\delta E_i \delta E_j)_{\omega, \mathbf{k}}$ . Отметим, что выражение (39.30) совпадает с соответствующим выражением (35.6) для кулоновской плазмы.

Найдем выражение для спектральной плотности  $(\delta N_a \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, p}$ , определяющей интеграл столкновений  $I_a$ . Для этого умножим выражение (39.3) на  $\delta E_i(\omega, \mathbf{k})$  и произведем усреднение. Учтем, что с помощью (39.28), (39.27), (39.20) функцию  $\delta E(\omega, \mathbf{k})$  можно выразить через  $\delta N_a^{\text{ист}}$ :

$$\begin{aligned} \delta E(\omega, \mathbf{k}) &= \\ &= -\frac{4\pi i}{\omega} \sum_a e_a \int \left[ \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}v)}{k^2 \varepsilon^{\parallel}(\omega, \mathbf{k})} + \frac{\omega^2}{k^2} \frac{[[\mathbf{k}v] \mathbf{k}]}{\omega^2 \varepsilon^{\perp} - c^2 k^2} \right] \delta N_a^{\text{ист}}(\omega, \mathbf{k}, p) dp. \end{aligned} \quad (39.36)$$

Используя это выражение, можно выразить спектральную плотность  $(\delta N_a \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}}$  через спектральную плотность  $(\delta N_a \delta N_b)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'}$  <sup>ист</sup>, которая определяется выражением (34.11). В результате получаем следующее выражение:

$$(\delta N_a \delta E_i)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}} = - \frac{ie_a n_a}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\Delta} (\delta E_j \delta E_i)_{\omega, \mathbf{k}} \frac{\partial f_a}{\partial p_j} + \\ + i \frac{4\pi e_a n_a}{k^2} 2\pi\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \left[ \frac{\mathbf{k}}{\varepsilon^{\parallel}(\omega, \mathbf{k})} + \frac{\omega [[\mathbf{k}\mathbf{v}]\mathbf{k}]}{\omega^2 \varepsilon^{\perp} - c^2 k^2} \right]_i f_a. \quad (39.37)$$

Отсюда

$$\text{Re}(\delta N_a \delta E_i)_{\omega, \mathbf{k}} = - \pi e_a n_a \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) (\delta E_j \delta E_i)_{\omega, \mathbf{k}} \frac{\partial f_a}{\partial p_j} - \\ - \frac{4\pi e_a n_a}{k^2} 2\pi\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \left[ \frac{\mathbf{k} \text{Im} \varepsilon^{\parallel}(\omega, \mathbf{k})}{|\varepsilon^{\parallel}(\omega, \mathbf{k})|^2} + \frac{\omega^3 [[\mathbf{k}\mathbf{v}]\mathbf{k}] \text{Im} \varepsilon^{\perp}(\omega, \mathbf{k})}{|\omega^2 \varepsilon^{\perp} - c^2 k^2|^2} \right] f_a. \quad (39.38)$$

Тем же путем получим выражение для самой общей спектральной плотности флуктуаций

$$(\delta N_a \delta N_b)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'} = \delta_{ab} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') 2\pi\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) n_a f_a + \\ + \frac{e_a e_b n_a n_b (\delta E_i \delta E_j)_{\omega, \mathbf{k}}}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\Delta)(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}' - i\Delta)} \frac{\partial f_a}{\partial p_i} \frac{\partial f_b}{\partial p'_j} - \\ - \frac{4\pi e_a e_b n_a n_b 2\pi\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}')}{k^2(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\Delta)} \left[ \frac{k_i}{\varepsilon^{\parallel}(\omega, \mathbf{k})} + \frac{\omega [[\mathbf{k}\mathbf{v}']\mathbf{k}]_i}{\omega^2 \varepsilon^{\perp}(\omega, \mathbf{k}) - c^2 k^2} \right] \frac{\partial f_a}{\partial p_i} f_b - \\ - \frac{4\pi e_a e_b n_a n_b 2\pi\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})}{k^2(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}' - i\Delta)} \left[ \frac{k_i}{\varepsilon^{\parallel*}(\omega, \mathbf{k})} + \frac{\omega [[\mathbf{k}\mathbf{v}]\mathbf{k}]_i}{\omega^2 \varepsilon^{\perp*}(\omega, \mathbf{k}) - c^2 k^2} \right] \frac{\partial f_b}{\partial p'_i} f_a. \quad (39.39)$$

Мы видим, что спектральные плотности  $(\delta N_a \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}}$ ,  $(\delta N_a \delta N_b)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'}$  выражаются через спектральную плотность флуктуаций поля  $(\delta E_i \delta E_j)_{\omega, \mathbf{k}}$  и диэлектрические проницаемости  $\varepsilon^{\parallel}$ ,  $\varepsilon^{\perp}$ .

Интегрируя полученные здесь выражения по  $\omega$ , можно найти пространственные спектральные плотности, например, функцию

$$(\delta N_a \delta N_b)_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'} = \frac{1}{2\pi} \int (\delta N_a \delta N_b)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'} d\omega.$$

Рассмотрим некоторые конкретные результаты для случая статистического равновесия.

Подставим в формулы (39.30), (39.31) распределение Максвелла. Используя выражения

$$\begin{aligned} \text{Im } \varepsilon^{\parallel} &= - \sum_a \frac{4\pi^2 e_a' n_a}{k^2} \int \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \mathbf{k} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p}, \\ \text{Im } \varepsilon^{\perp} &= - \sum_a \frac{2\pi^2 e_a'^2 n_a}{\omega k^2} \int \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) [[\mathbf{k}\mathbf{v}] \mathbf{k}] \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p}, \end{aligned} \quad (39.40)$$

которые следуют из выражений (39.24), (39.25), получим

$$(\delta E^{\parallel} \delta E^{\parallel})_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{8\pi}{\omega} \frac{\text{Im } \varepsilon^{\parallel}(\omega, \mathbf{k})}{|\varepsilon^{\parallel}(\omega, \mathbf{k})|^2} \kappa T, \quad (39.41)$$

$$(\delta E^{\perp} \delta E^{\perp})_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{16\pi\omega^3 \text{Im } \varepsilon^{\perp}(\omega, \mathbf{k})}{|\omega^2 \varepsilon^{\perp}(\omega, \mathbf{k}) - c^2 k^2|^2} \kappa T. \quad (39.42)$$

Выражение (39.41) совпадает, естественно, с выражением (36.4). При малых  $\mathbf{k}$  из (36.4) следует выражение (36.32). Аналогичным путем из (39.42) находим, что при малых  $\mathbf{k}$  (для области прозрачности)

$$(\delta E^{\perp} \delta E^{\perp})_{\omega, \mathbf{k}} = 16\pi^2 \text{sign } \omega \delta(\omega^2 \text{Re } \varepsilon^{\perp} - c^2 k^2) \kappa T. \quad (39.43)$$

Отсюда

$$(\delta E^{\perp} \delta E^{\perp})_{\omega, \mathbf{k}} = 8\pi^2 [\delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k)] \kappa T, \quad (39.44)$$

где  $\omega_k = \sqrt{\omega_L^2 + c^2 k^2}$ .

Для пространственной спектральной плотности из формулы (39.44) следует выражение

$$(\delta E^{\perp} \delta E^{\perp})_{\mathbf{k}} = 8\pi \kappa T. \quad (39.45)$$

Полученный результат аналогичен результату (36.37) для продольного поля, который справедлив, как следует из сравнения с (36.18), при  $k \ll 1/r_D$ . Покажем, что в отличие от этого результат (39.45) справедлив при любых  $k$ . Для этого проинтегрируем в (39.42) по  $\omega$  и запишем полученное выражение в виде

$$(\delta E^{\perp} \delta E^{\perp})_{\mathbf{k}} = -8\pi \kappa T \frac{1}{2\pi i} \int \left[ \frac{1}{\omega^2 \varepsilon^{\perp} - c^2 k^2} - \text{к. с.} \right] \omega d\omega. \quad (39.46)$$

Первый из интегралов содержит особенность только в нижней полуплоскости, а второй — в верхней, поэтому в первом замкнутом контуре интегрирования в верхней полуплоскости, а во втором — в нижней.

Учитывая, что

$$\omega^2 \varepsilon^{\perp} - c^2 k^2 \rightarrow \infty \quad \text{при } \omega \rightarrow \infty,$$

и используя значение интегралов

$$-\frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\omega}{\omega \pm i\Delta} = \pm \frac{1}{2},$$

получим из (39.46) результат, совпадающий с (39.45).

Такое совпадение обусловлено следующим. Интеграл (39.46) определяется значением функции  $\epsilon^\perp(\omega, \mathbf{k})$  при  $\omega \rightarrow \infty$ , но при фиксированном  $k$ . При этом  $\omega/k > c$ , т. е. фазовая скорость больше скорости света.

Из выражения (39.40) следует, что  $\text{Im } \epsilon^\perp(\omega, \mathbf{k}) \rightarrow 0$  при  $\Delta \rightarrow 0$ , если  $\omega/k > c$ , так как условие  $\omega = k v$ , при котором подынтегральное выражение в (39.40) отлично от нуля, не может выполняться: все заряженные частицы имеют скорости, меньшие скорости света. Поэтому вклад в (39.46) в равновесном состоянии приходится только на область прозрачности.

Учет флуктуаций поперечного поля не влияет в равновесном состоянии на вид корреляционной функции. Чтобы убедиться в этом, надо подставить в выражение (39.39) распределения Максвелла для функций  $f_a, f_b$  и проинтегрировать по  $\omega$ . При интегрировании по  $\omega$  все члены, обусловленные флуктуациями поперечного поля, выпадают и для корреляционной функции

$$g_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}') = [(\delta N_a \delta N_b)_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'} - n_a \delta_{ab} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') f_a] / n_a n_b$$

получается следующее выражение:

$$g_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}') = - \frac{e_a e_b}{\sum_c e_c^2 n_c (1 + r_D^2 k^2)} f_a(\mathbf{p}) f_b(\mathbf{p}'). \quad (39.47)$$

Это выражение остается справедливым и для релятивистской плазмы, если под  $f_a, f_b$  понимать релятивистские распределения Максвелла (см. § 40).

Выражение (39.47) совпадает с выражением (36.22) для фурье-компоненты корреляционной функции заряженных частиц в кулоновской плазме.

Приведенные в настоящем параграфе результаты относятся к случаю пространственно однородной и изотропной плазмы, когда функции распределения  $f_a = f_a(|\mathbf{p}|, t)$ , т. е. зависят лишь от модуля импульса.

При наличии внешних полей функции  $f_a$  становятся анизотропными. В анизотропном состоянии тензор диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{ij}$  зависит не только от вектора  $\mathbf{k}$ , но и от других векторов, поэтому тензор  $\epsilon_{ij}$  не определяется уже двумя функциями  $\epsilon^\parallel, \epsilon^\perp$ .

Отметим те изменения, которые произойдут в исходных выражениях (39.3) — (39.7), при учете анизотропии.

В уравнении (39.3) теперь нельзя опустить член, содержащий  $[\mathbf{v} \delta \mathbf{B}] \partial f_a / \partial \mathbf{p}$ , поэтому уравнение для  $\delta N_a(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p})$  принимает вид

$$\delta N_a(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) = \delta N_a^{\text{нст}}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) - \frac{ie_a n_a}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\Delta} \left( \delta E(\omega, \mathbf{k}) + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \delta \mathbf{B}(\omega, \mathbf{k})] \right) \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}}. \quad (39.48)$$

Вследствие этого тензор диэлектрической проницаемости определяется теперь выражением

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} + \sum_a \frac{4\pi e_a^2 n_a}{\omega} \int \frac{v_i \left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega}\right) \frac{\partial f_a}{\partial p_j} + \frac{v_i v_j}{\omega} \mathbf{k} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\Delta} d\mathbf{p}. \quad (39.49)$$

В изотропном случае это выражение совпадает с (39.21).

В выражение для тензора  $(\delta E_i \delta E_j)_{\omega, \mathbf{k}}$  будет входить тензор  $A_{ij}^{-1}$ , обратный тензору

$$A_{ij} = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij} - (\delta_{ij} k^2 - k_i k_j). \quad (39.50)$$

В изотропном случае

$$A_{ij}^{-1} = \frac{c^2}{\omega^2 k^2} \left[ \frac{k_i k_j}{\epsilon^{\parallel}(\omega, \mathbf{k})} + \frac{\delta_{ij} k^2 - k_i k_j}{\epsilon^{\perp}(\omega, \mathbf{k}) - c^2 k^2 / \omega^2} \right]. \quad (39.51)$$

Способ нахождения спектральных плотностей остается прежним.

#### § 40. Кинетические уравнения для релятивистской плазмы

Рассмотрим две формы записи интеграла столкновений для релятивистской плазмы.

Подставим выражение (39.38) во второе выражение (33.5) и запишем полученное выражение для интеграла столкновений в виде (37.4):

$$I_a = \frac{\partial}{\partial p_i} D_{ij}^a \frac{\partial f_a}{\partial p_j} + \frac{\partial}{\partial p_i} (A_i^a f_a). \quad (40.1)$$

Коэффициенты  $D_{ij}^a$ ,  $A_i^a$  определяются теперь выражениями

$$D_{ij}^a = \frac{e_a^2}{16\pi^3} \int \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) [(\delta E_i^{\parallel} \delta E_j^{\parallel})_{\omega, \mathbf{k}} + (\delta E_i^{\perp} \delta E_j^{\perp})_{\omega, \mathbf{k}}] d\omega d\mathbf{k}, \quad (40.2)$$

$$A_i^a = \frac{e_a^2}{2\pi^2} \int \left[ \frac{k_i \text{Im } \epsilon^{\parallel}}{k^2 |\epsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} + \frac{\omega^3 [k\mathbf{v}]_i \text{Im } \epsilon^{\perp}}{k^2 |\omega^2 \epsilon^{\perp} - c^2 k^2|^2} \right] \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) d\omega d\mathbf{k}. \quad (40.3)$$

Входящие сюда функции  $(\delta E_i^{\parallel} \delta E_j^{\parallel})_{\omega, \mathbf{k}}$ ,  $(\delta E_i^{\perp} \delta E_j^{\perp})_{\omega, \mathbf{k}}$ ,  $\varepsilon^{\parallel}$ ,  $\varepsilon^{\perp}$  определяются выражениями (39.30), (39.31), (39.35), (39.24), (39.25).

В нерелятивистском приближении, когда можно пренебречь вкладом флуктуаций поперечного поля, выражения (40.2), (40.3) совпадают с (37.5), (37.6).

Вторая форма записи соответствует выражению (37.1) для нерелятивистской плазмы. Чтобы получить ее, исключим из (40.2), (40.3) спектральные функции поля и функции  $\text{Im } \varepsilon^{\parallel}$ ,  $\text{Im } \varepsilon^{\perp}$  с помощью формул (39.30), (39.31), (39.35), (39.40) и выполним интегрирование по  $\omega$ . Полученное таким путем выражение для  $I_a$  удобно записать в виде

$$I_a = \sum_b n_b \frac{\partial}{\partial p_i} \int Q_{ij}^{ab} \left\{ \frac{\partial f_a}{\partial p_j} f_b - \frac{\partial f_b}{\partial p_j} f_a \right\} dp'. \quad (40.4)$$

Здесь введено обозначение

$$Q_{ij}^{ab} = 2e_a^2 e_b^2 \int \left[ \frac{1}{|\varepsilon^{\parallel}(\omega, \mathbf{k})|^2} + \frac{([\mathbf{k}v][\mathbf{k}v'])^2}{|(\mathbf{k}v)^2 \varepsilon^{\perp}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) - c^2 \mathbf{k}^2|^2} \right] \frac{k_i k_j}{k^4} \delta(\mathbf{k}v - \mathbf{k}v') dk. \quad (40.5)$$

При получении этого выражения использовано равенство

$$\left( [[\mathbf{k}v] \mathbf{k}] \frac{\partial f_a}{\partial p} \right) (\mathbf{k}v') = [\mathbf{k}v] [\mathbf{k}v'] \left( \mathbf{k} \frac{\partial f_a}{\partial p} \right). \quad (40.6)$$

Для нерелятивистской плазмы второй член в выражении (40.5) пренебрежимо мал и из (40.4), (40.5) следует выражение (37.1).

Выражение (40.4) представляет, таким образом, обобщение интеграла столкновений Балеску — Ленарда на случай релятивистской плазмы. Оно было проведено в работе Силина [31].

Интеграл столкновений (40.4) является очень сложным, поэтому естественно использование более простого выражения для интеграла столкновений, в котором учет поляризации плазмы производится более грубо.

В § 38 было показано, что для состояний плазмы, не сильно отличающихся от равновесного состояния, можно вместо (37.1) использовать более простое выражение для интеграла столкновений, предложенное Ландау. Покажем, что аналогичное упрощение можно произвести и для релятивистского интеграла столкновений.

Прежде всего заметим, что равновесным решением кинетического уравнения с интегралом столкновений (40.4) является



релятивистское распределение Максвелла

$$f_a(\mathbf{p}) = A_a \exp \left[ - \frac{c \sqrt{p^2 + m_a^2 c^2}}{\kappa T} \right]. \quad (40.7)$$

Величина  $A_a$  определяется из условия нормировки.

Чтобы убедиться в этом, подставим (40.7) в (40.4), (40.5) и учтем, что для функции (40.7)

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} = \frac{pc^2}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} = \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \varepsilon}, \quad \text{так как } \mathbf{p} = \frac{\varepsilon \mathbf{v}}{c^2}.$$

В результате выражение (40.4) примет вид

$$I_a = - \frac{1}{\kappa T} \sum_b n_b \frac{\partial}{\partial p_i} \int Q_{ij}^{ab} (v - v')_j f_a(\mathbf{p}) f_b(\mathbf{p}') d\mathbf{p}'.$$

Это выражение обращается в нуль, так как в (40.5) есть  $\delta(\mathbf{kv} - \mathbf{kv}')$  и  $(\mathbf{kv} - \mathbf{kv}') \delta(\mathbf{kv} - \mathbf{kv}') = 0$ .

Вернемся к вопросу об упрощении интеграла столкновений для релятивистской плазмы.

Мы видим (§ 39), что флуктуации поперечного поля не влияют на вид корреляционной функции  $g_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}')$ . Действительно, выражение (39.47) отличается от соответствующего выражения (36.22) для кулоновской плазмы лишь тем, что в (39.47) функции  $f_a, f_b$  — релятивистские распределения Максвелла. Вследствие этого выражение для корреляционной функции  $g_{ab}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{p}')$  совпадает с выражением (36.24).

Таким образом, и в релятивистской плазме радиус корреляции порядка радиуса Дебая  $r_D$ . Это означает, что в равновесном состоянии пространственный спектр ограничен со стороны малых значений  $k$ . При этом  $k_{\min} \sim 1/r_D$ . Это положение сохраняется и для состояний, близких к равновесным, поэтому в (40.4), (40.5) можно приближенно положить  $\varepsilon^{\parallel} = 1, \varepsilon^{\perp} = 1$ , но интегрировать по  $k$  лишь по области  $k > 1/r_D$ . В результате выражение (40.5) примет вид

$$Q_{ij}^{ab} = 2e_a^2 e_b^2 \int \frac{k_i k_j}{k^4} \left[ 1 + \frac{([\mathbf{kv}][\mathbf{kv}'])^2}{|(\mathbf{kv})^2 - c^2 k^2|^2} \right] \delta(\mathbf{kv} - \mathbf{kv}') dk \quad (k > 1/r_D). \quad (40.8)$$

Здесь следует, как и в интеграле столкновений Ландау, произвести ограничение области интегрирования и со стороны больших значений  $k$ . Величина  $k_{\max}$  может быть определена из условия, аналогичного условию (38.2).

Выражение (40.8) для изотропной плазмы можно записать в виде

$$Q_{ij}^{ab} = 2e_a^2 e_b^2 \int \frac{k_i k_j}{k^4} \left[ 1 + \frac{[\mathbf{k}\mathbf{v}][\mathbf{k}\mathbf{v}']}{(\mathbf{k}\mathbf{v})^2 - c^2 k^2} \right]^2 \delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}') d\mathbf{k}. \quad (40.9)$$

Это выражение отличается от (40.8) членом, который исчезает при интегрировании по  $p^\perp$ .

Выражение (40.9) после некоторых упрощений можно записать в более простом виде [8, 9]:

$$Q_{ij}^{ab} = 2e_a^2 e_b^2 [c^2 - (\mathbf{v}\mathbf{v}')]^2 \int \frac{k_i k_j}{[c^2 k^2 - (\mathbf{k}\mathbf{v})^2]^2} \delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}') d\mathbf{k}. \quad (40.10)$$

В выражениях (40.9), (40.10) интегрирование производится по области  $k_{\max} > k > 1/r_D$ .

При  $c \rightarrow \infty$  выражение (40.10) переходит в (38.4). Как и в (38.4), здесь можно выполнить интегрирование по  $\mathbf{k}$ . В результате получается выражение, которое при  $c \rightarrow \infty$  переходит в (38.5) [10].

Кинетическое уравнение с интегралом столкновений (40.1), (40.8) (или (40.1), (40.10)) является релятивистским обобщением кинетического уравнения Ландау для функции распределения  $f_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ , т. е. обычной функции распределения семи переменных. Можно записать соответствующее кинетическое уравнение и для функции распределения

$$n_a F_a(Q, P) \equiv \bar{N}_a(Q, P) \quad (40.11)$$

восьми переменных  $Q = (\mathbf{r}, ict)$ ,  $P = (\mathbf{p}, i\mathcal{E}/c)$ . Микроскопическая функция  $N_a(Q, P)$  определяется системой уравнений (24.16) — (24.18).

Кинетическое уравнение для функции  $F_a$  имеет вид [32, 9, 8]

$$U_i \frac{\partial F_a}{\partial Q_i} = \sum_b n_b \int \mathcal{E}_{ij}^{ab} \left\{ \frac{\partial F_a}{\partial P_j} F_b - \frac{\partial F_b}{\partial P_j} F_a \right\} d\mathbf{p}' d\mathcal{E}', \quad (40.12)$$

где

$$\mathcal{E}_{ij}^{ab} = 2e_a^2 e_b^2 (U_i U_j')^2 \int \frac{k_i k_j}{(c^2 k^2 - \omega^2)} \delta(k_i U_i) \delta(k_j U_j') d\mathbf{k} d\omega. \quad (40.13)$$

В (40.12), (40.13)  $U = (\gamma\mathbf{v}, i\gamma c)$  — четырехмерная скорость,  $P_i = m_a U_i$ ,  $k = (k, i\omega/c)$  — четырехмерный волновой вектор.

В выражении (40.13) можно выполнить интегрирование по  $\omega$ ,  $\mathbf{k}$ . При этом следует воспользоваться симметрией тензора  $\mathcal{E}_{ij}^{ab}$  относительно  $U_i$ ,  $U_j'$  и тем, что

$$U_i \mathcal{E}_{ij}^{ab} = 0, \quad U_j' \mathcal{E}_{ij}^{ab} = 0.$$

При учете этого для определения тензора  $\mathcal{E}_{ij}^{ab}$  достаточно найти сумму его диагональных элементов. В результате получим следующее выражение:

$$\mathcal{E}_{ij}^{ab} = \frac{2e_a^2 e_b^2}{c^5} \ln \frac{r_D}{r_{\min}} \{ [(U_i U'_i)^2 / c^4 - 1] \delta_{ij} - (U_i U_j + U'_i U'_j) / c^2 - (U_i U'_i)(U_j U'_j + U'_i U'_j) / c^4 \} / [(U_i U'_i)^2 / c^4 - 1]^{1/2}. \quad (40.14)$$

Здесь  $r_{\min} = 1/k_{\max}$ .

Кинетическое уравнение (40.12) с ядром (40.14) было получено впервые в работе Беляева и Будкера [32, 9, 8].

В равновесном случае кинетическое уравнение (40.12) имеет решение

$$F_a(P) = C \delta(P_i^2 + m_a^2 c^2) \exp\left(\frac{P_i U_i}{\kappa T}\right), \quad (40.15)$$

которое является четырехмерным релятивистским распределением Максвелла.

Чтобы перейти от уравнения (40.12) для функции  $F_a$  к кинетическому уравнению для функции  $f_a$ , надо использовать связь функций  $F_a$ ,  $f_a$ :

$$F_a(Q, P) = f_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \delta(\mathcal{E} - c \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_a^2 c^2}) m_a c^2 / \mathcal{E}. \quad (40.16)$$

Используя эту связь, можно, в частности, перейти от распределения (40.15) к релятивистскому распределению (40.7).

## ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ ПОЛЕЙ НА КИНЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПЛАЗМЫ

### § 41. Уравнения для функций $f_a$ , $\delta N_a$ при наличии внешнего электрического поля

Исследуем влияние внешнего электрического поля на кинетические свойства пространственно однородной плазмы. В этом случае система уравнений (26.5), (27.7) для функций  $f_a$ ,  $\delta N_a$  принимает вид

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + e_a \mathbf{E}(t) \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} = - \frac{e_a}{n_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \int \operatorname{Re} (\delta N_a \delta \mathbf{E})_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, t} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \equiv I_a(\mathbf{p}, t), \quad (41.1)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \Delta + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + e_a \mathbf{E}(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) (\delta N_a - \delta N_a^{\text{вст}}) = - e_a \delta \mathbf{E} \frac{\partial n_a^{\text{вст}}}{\partial \mathbf{p}}, \quad (41.2)$$

$$\operatorname{rot} \delta \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \delta \mathbf{E} = \sum_a 4\pi e_a \int \delta N_a d\mathbf{p}.$$

Корреляция флуктуаций  $\delta N_a^{\text{вст}}$  определяется уравнением

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \Delta + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + e_a \mathbf{E}(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \overline{(\delta N_a \delta N_b)_{x, t, x', t'}^{\text{вст}}} = 0, \quad (41.3)$$

которое следует решать при начальном условии

$$\overline{(\delta N_a \delta N_b)_{x, t, x', t'}^{\text{вст}}} \Big|_{t=t'} = n_a \delta_{ab} \delta(x - x') f_a(x', t'). \quad (41.4)$$

Из-за действия внешнего поля функция распределения  $f_a(\mathbf{p}, t)$  может и не быть медленно меняющейся функцией. Это существенно усложняет расчет спектральных плотностей флуктуаций  $\delta N_a$ ,  $\delta \mathbf{E}$ . В случае пространственно однородной плазмы расчет можно существенно упростить, если вместо функции

распределения  $f_a(\mathbf{p}, t)$  ввести новую функцию

$$f_a\left(\mathbf{P}_a + e_a \int_{-\infty}^t \mathbf{E}(t') dt', t\right) \equiv F_a(\mathbf{P}_a, t). \quad (41.5)$$

Из (41.1) получаем следующее уравнение для функции  $F_a$ :

$$\frac{\partial F_a}{\partial t} = I_a\left(\mathbf{P}_a + e_a \int_{-\infty}^t \mathbf{E}(t') dt', t\right) \equiv I_a(\mathbf{P}_a, t). \quad (41.6)$$

Интеграл столкновений  $I_a(\mathbf{P}_a, t)$  связан со спектральной плотностью  $(\delta N_a \delta \mathbf{E})_{k, \mathbf{p}, t}$  следующим образом:

$$I_a(\mathbf{P}_a, t) = -\frac{e_a}{n_a (2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}} \int_{k, \mathbf{P}_a + e_a \int_{-\infty}^t \mathbf{E}(t') dt'} \operatorname{Re} (\delta N_a \delta \mathbf{E}) d\mathbf{k}. \quad (41.7)$$

Из выражений (41.6), (41.7) видно, что в первом приближении по плазменному параметру (этому приближению отвечают исходные уравнения (41.1)–(41.4)) производная функции распределения по времени порядка  $\mu \omega_L F_a$ . Вследствие этого быстрые (вибрационные) вклады в функции  $F_a$  при  $\mu \ll 1$  малы. Основной является медленно меняющаяся часть функции распределения. Если внешнее поле является периодическим с частотой  $\omega_0$ , то при  $\omega_0 \geq \omega_L$  медленно меняющуюся функцию распределения можно получить из  $F_a(\mathbf{p}_a, t)$  усреднением по периоду  $2\pi/\omega_0$ .

Ниже, если не будет сделано оговорки, под  $F_a, I_a$  будем понимать медленно меняющиеся части этих функций.

Из уравнений (41.2)–(41.4) следует, что для расчета спектральной плотности, определяющей интеграл столкновений (41.7), надо знать спектральные плотности флуктуаций  $\delta N_a^{\text{нст}}$ ,  $\delta \mathbf{E}^{\text{нст}}$ .

## § 42. Спектральные плотности флуктуаций источников при наличии высокочастотного электрического поля

Спектральная плотность флуктуаций  $\delta N_a^{\text{нст}}$  определяется уравнением (41.3) с начальным условием (41.4). При наличии высокочастотного поля флуктуационный процесс не является стационарным даже для идеальной плазмы. Это существенно усложняет решение задачи.

Используем уравнения движения

$$d\mathbf{p}/dt = e_a \mathbf{E}(t). \quad (42.1)$$

Запишем решение уравнения (41.3) с начальным условием (41.4):

$$\begin{aligned} \overline{(\delta N_a \delta N_b)}_{x, t, x', t-\tau}^{\text{нст}} &= \\ &= n_a \delta_{ab} \delta \left( \mathbf{p} - \mathbf{p}' - e_a \int_{t-\tau}^t \mathbf{E}(t') dt' \right) \delta \left( \mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v}\tau - \right. \\ &\left. - \frac{e_a}{m_a} \int_{t-\tau}^t (t - \tau - t') \mathbf{E}(t') dt' \right) f_a \left( \mathbf{p} - e_a \int_{t-\tau}^t \mathbf{E}(t') dt', t - \tau \right). \quad (42.2) \end{aligned}$$

Учтем, что согласно (41.5)

$$\begin{aligned} f_a \left( \mathbf{p} - e_a \int_{t-\tau}^t \mathbf{E}(t') dt', t - \tau \right) &= \\ = f_a \left( \mathbf{P} + e_a \int_{-\infty}^t \mathbf{E}(t') dt' - e_a \int_{t-\tau}^t \mathbf{E}(t') dt', t - \tau \right) &= F_a(\mathbf{P}, t - \tau). \quad (42.3) \end{aligned}$$

Таким образом, функция (42.2) может быть выражена через медленно меняющуюся функцию  $F_a$ . Для идеальной плазмы можно ограничиться нулевым приближением по запаздыванию функции  $F_a$ . В этом приближении из (42.2), (42.3) находим искомую спектральную плотность

$$\begin{aligned} (\delta V_a \delta N_b)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}', t}^{\text{нст}} &= n_a \delta_{ab} 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \delta \left( \mathbf{p} - \mathbf{p}' - e_a \int_{t-\tau}^t \mathbf{E}(t') dt' \right) \times \\ &\times \exp \left\{ -\Delta\tau + i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\tau - \right. \\ &\left. - i \frac{e_a}{m_a} \int_{t-\tau}^t (t - \tau - t') \mathbf{k}\mathbf{E}(t') dt' \right\} d\tau F_a(\mathbf{P}, t). \quad (42.4) \end{aligned}$$

При  $\mathbf{E}(t) = 0$  это выражение совпадает с (34.11).

Из (42.4) следует выражение для более простой функции

$$\begin{aligned} (\delta N_a \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, t}^{\text{нст}} &= i \frac{4\pi e_a n_a}{k^2} \mathbf{k} 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} d\tau \exp \left\{ -\Delta\tau + i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\tau - \right. \\ &\left. - i \frac{e_a}{m_a} \int_{t-\tau}^t (t - \tau - t') \mathbf{k}\mathbf{E}(t') dt' \right\} F_a(\mathbf{P}, t) \quad (42.5) \end{aligned}$$

и для спектральной плотности флуктуаций поля

$$\begin{aligned} \langle \delta E \delta E \rangle_{\omega, \mathbf{k}, t}^{\text{ист}} &= \sum_a \frac{(4\pi)^2 e_a^2 n_a}{k^2} 2 \operatorname{Re} \int d\tau \int d\mathbf{p} \times \\ &\times \exp \left\{ -\Delta\tau + i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\tau - i \frac{e_a}{m_a} \int_{t-\tau}^t (t - \tau - t') \mathbf{k}\mathbf{E}(t') dt' \right\} F_a(\mathbf{P}, t). \end{aligned} \quad (42.6)$$

В этом выражении удобнее перейти к интегрированию по  $\mathbf{P}$ . Учитывая, что

$$\begin{aligned} \mathbf{k}\mathbf{v}\tau + \frac{e_a}{m_a} \int_{t-\tau}^t (t - \tau - t') \mathbf{k}\mathbf{E}(t') dt' &= \\ &= \mathbf{k}\mathbf{V}\tau - \frac{e_a}{m_a} \int_t^{t-\tau} dt' \int_{-\infty}^{t'} \mathbf{k}\mathbf{E}(t'') dt'', \quad \mathbf{V} = \mathbf{P}/m_a, \end{aligned} \quad (42.7)$$

можно записать выражение (42.6) в виде

$$\begin{aligned} \langle \delta E \delta E \rangle_{\omega, \mathbf{k}, t}^{\text{ист}} &= \\ &= \sum_a \frac{(4\pi)^2 e_a^2 n_a}{k^2} 2 \operatorname{Re} \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{P} \exp \left\{ -\Delta\tau + i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{V})\tau + \right. \\ &\quad \left. + \frac{ie_a}{m_a} \mathbf{k} \int_t^{t-\tau} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \mathbf{E}(t'') \right\} F_a(\mathbf{P}, t). \end{aligned} \quad (42.8)$$

Мы видим, что спектральные плотности (42.4)–(42.6) явно зависят от времени, что и указывает на нестационарность процессов, являющихся источниками флуктуаций фазовой плотности и поля.

Ниже при конкретных расчетах будем задавать поле в виде

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E} \sin \omega_0 t. \quad (42.9)$$

Тогда

$$\int_t^{t-\tau} dt' \int_{-\infty}^{t'} \mathbf{E} \sin \omega_0 t'' dt'' = \frac{\mathbf{E}}{\omega_0^2} [\sin \omega_0 t - \sin \omega_0 (t - \tau)] \quad (42.10)$$

и выражение (42.8) принимает вид

$$\begin{aligned} \langle \delta E \delta E \rangle_{\omega, \mathbf{k}, t}^{\text{ист}} &= \\ &= \sum_a \frac{(4\pi)^2 e_a^2 n_a}{k^2} 2 \operatorname{Re} \int d\tau \int d\mathbf{P} \exp \left\{ -\Delta\tau + i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{V})\tau - \right. \\ &\quad \left. - ia_a [\sin \omega_0 (t - \tau) - \sin \omega_0 t] \right\} F_a(\mathbf{P}, t). \end{aligned} \quad (42.11)$$

В выражении (42.5) сделаем замену  $p = P + e_a \int_{-\infty}^t E(t') dt'$ .

Тогда, используя равенство (42.7), получим выражение

$$\begin{aligned}
 (\delta N_a \delta E)^{\text{нст}}_{\omega, \mathbf{k}, P + e_a \int_{-\infty}^t E(t') dt'} &= \\
 &= i \frac{4\pi e_a n_a}{k^2} 2k \operatorname{Re} \int_0^{\infty} d\tau \exp \left\{ -\Delta\tau + i(\omega - kV)\tau - \right. \\
 &\quad \left. - i \frac{e_a}{m_a} k \int_t^{t-\tau} dt'' \int_{-\infty}^{t'} dt''' E(t''') \right\} F_a(P, t). \quad (42.12)
 \end{aligned}$$

При  $E(t)$  в виде (42.9)

$$\int_{-\infty}^t E(t') dt' = -\frac{E}{\omega_0} \cos \omega_0 t \quad (42.13)$$

и выражение (42.12) принимает вид

$$\begin{aligned}
 (\delta N_a \delta E)^{\text{нст}}_{\omega, \mathbf{k}, P - \frac{e_a}{\omega_0} E \cos \omega_0 t} &= \\
 &= i \frac{4\pi e_a n_a}{k^2} k 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} d\tau \exp \{ -i\Delta\tau + i(\omega - kV)\tau - \\
 &\quad - ia_a [\sin \omega_0(t - \tau) - \sin \omega_0 t] \} F_a(P, t). \quad (42.14)
 \end{aligned}$$

В формулах (42.11), (42.14) введено обозначение

$$a_a = e_a k E / (m_a \omega_0^2). \quad (42.15)$$

Используем выражение (42.11) для определения спектральной плотности флуктуаций поля для случая, когда  $\omega_0 \gtrsim \omega_L$ .

### § 43. Спектральная плотность флуктуаций электрического поля

Из первого уравнения (41.2) находим, что при  $E(t) = E \sin \omega_0 t$  фурье-компонента фазовой плотности в нулевом приближении по запаздыванию определяется уравнением

$$\begin{aligned}
 \delta N_a \left( \mathbf{k}, P - \frac{e_a}{\omega_0} \cos \omega_0 t, t \right) &= \delta N_a^{\text{нст}} \left( \mathbf{k}, P - \frac{e_a}{\omega_0} \cos \omega_0 t, t \right) - \\
 &- e_a n_a \int_0^{\infty} \exp \{ -\Delta\tau - ikV\tau - ia_a [\sin \omega_0(t - \tau) - \sin \omega_0 t] \} \times \\
 &\quad \times \delta E(\mathbf{k}, t - \tau) \frac{\partial F_a}{\partial P}(\mathbf{P}, t). \quad (43.1)
 \end{aligned}$$



Из уравнения (41.2) для флуктуации поля находим

$$ik \delta E(\mathbf{k}, t) = 4\pi \sum_a \delta q_a(\mathbf{k}, t) = 4\pi \sum_a e_a \int \delta N_a(\mathbf{k}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}. \quad (43.2)$$

Здесь  $\delta q_a(\mathbf{k}, t)$  — флуктуация плотности заряда компоненты  $a$ .

Из уравнений (43.1), (43.2) следует система уравнений для функций  $\delta q_a(\mathbf{k}, t)$ . Используя разложение

$$\exp(-ia_a \sin \omega_0 t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(a_a) \exp(-in\omega_0 t) \quad (43.3)$$

по функциям Бесселя, запишем систему уравнений для функций  $\delta q_a(\omega, \mathbf{k})$  в виде

$$\begin{aligned} \delta q_a(\omega, \mathbf{k}) = & \delta q_a^{\text{нст}}(\omega, \mathbf{k}) + \frac{ik}{k^2} 4\pi e_a^2 n_a \sum_b \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} I_n(a_a) I_m(a_b) \times \\ & \times \int_0^{\infty} \int d\tau d\mathbf{P} \exp[-\Delta\tau + i(\omega + n\omega_0 - \mathbf{kV})\tau] \times \\ & \times \frac{\partial F_a(\mathbf{P}, t)}{\partial \mathbf{P}} \delta q_b(\omega + (n-m)\omega_0, \mathbf{k}). \end{aligned}$$

Эта система уравнений может быть упрощена, если вместо функций  $\delta q_a(\mathbf{k}, t)$ ,  $\delta q_a(\omega, \mathbf{k})$  ввести функции

$$\begin{aligned} \delta \tilde{q}_a(\mathbf{k}, t) = e^{-ia_a \sin \omega_0 t} \delta q_a(\mathbf{k}, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(a_a) e^{-in\omega_0 t} \delta q_a(\mathbf{k}, t), \\ \delta \tilde{q}_a(\omega, \mathbf{k}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(a_a) \delta q_a(\omega - n\omega_0, \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (43.4)$$

Система уравнений для функций  $\delta \tilde{q}_a(\omega, \mathbf{k})$  имеет вид

$$\delta \tilde{q}_a(\omega, \mathbf{k}) + 4\pi \alpha_a(\omega, \mathbf{k}) \sum_b \sum_{l=-\infty}^{\infty} I_l(a_{ab}) \delta \tilde{q}_b(\omega - l\omega_0, \mathbf{k}) = \delta \tilde{q}_a^{\text{нст}}(\omega, \mathbf{k}). \quad (43.5)$$

Здесь  $\alpha_a(\omega, \mathbf{k})$  — поляризуемость компоненты  $a$ :

$$\begin{aligned} \alpha_a(\omega, \mathbf{k}) &= \frac{e_a^2 n_a}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \partial F_a / \partial \mathbf{P}}{\omega - \mathbf{kV} + i\Delta} d\mathbf{P}, \\ \epsilon(\omega, \mathbf{k}) &= 1 + 4\pi \sum_a \alpha_a(\omega, \mathbf{k}), \end{aligned} \quad (43.6)$$

и  $a_{ab} = (e_a/m_a - e_b/m_b) \mathbf{kE}/\omega_0^2$ .

Систему уравнений (43.5) решаем, используя теорию возмущений по малому параметру  $m_e/m_i$ . В нулевом приближении, т. е. при  $m_i = \infty$ , из (43.5) находим

$$\begin{aligned} \delta \tilde{q}_e(\omega, \mathbf{k}) &= \\ &= \frac{\delta \tilde{q}_e^{\text{нст}}(\omega, \mathbf{k})}{\varepsilon(\omega, \mathbf{k})} - \frac{4\pi\alpha(\omega, \mathbf{k})}{\varepsilon(\omega, \mathbf{k})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(a_e) \delta \tilde{q}_i^{\text{нст}}(\omega - n\omega_0, \mathbf{k}), \\ \delta \tilde{q}_i(\omega, \mathbf{k}) &= \delta \tilde{q}_i^{\text{нст}}(\omega, \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (43.7)$$

Входящее сюда выражение для  $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$  определяется формулой (43.6) при  $m_i = \infty$ .

Совершим обратный переход от функций  $\delta \tilde{q}_a(\omega, \mathbf{k})$  к функциям  $\delta q_a(\omega, \mathbf{k})$ . Для этого используем соотношения, обратные (43.4),

$$\delta q_a(\mathbf{k}, t) = \delta \tilde{q}_a(\mathbf{k}, t) e^{ia_a \sin \omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(a_a) e^{in\omega_0 t} \delta \tilde{q}_a(\mathbf{k}, t), \quad (43.8)$$

$$\delta q_a(\omega, \mathbf{k}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(a_a) \delta \tilde{q}_a(\omega + n\omega_0, \mathbf{k}).$$

С помощью этих соотношений из (43.7) получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \delta q_e(\omega, \mathbf{k}) &= \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} I_n(a_e) I_m(a_e) \left[ \frac{\delta q_e^{\text{нст}}(\omega + (n-m)\omega_0, \mathbf{k})}{\varepsilon(\omega + n\omega_0, \mathbf{k})} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\pi\alpha_e(\omega + n\omega_0, \mathbf{k})}{\varepsilon(\omega + n\omega_0, \mathbf{k})} \delta q_i^{\text{нст}}(\omega + (n-m)\omega_0, \mathbf{k}) \right], \\ \delta q_i(\omega, \mathbf{k}) &= \delta q_i^{\text{нст}}(\omega, \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (43.9)$$

Подставим эти решения в правую часть равенства

$$\delta E(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{ik}{k^2} 4\pi [\delta q_e(\omega, \mathbf{k}) + \delta q_i(\omega, \mathbf{k})], \quad (43.10)$$

которое следует из (43.2), и используем тождество

$$\frac{1}{\varepsilon(\omega, \mathbf{k})} = 1 - \frac{4\pi\alpha_e}{\varepsilon(\omega, \mathbf{k})}. \quad (43.11)$$

В результате получим следующее выражение для  $\delta E(\omega, \mathbf{k})$ :

$$\delta E(\omega, \mathbf{k}) = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} I_n(a_e) I_m(a_e) \frac{\delta E^{\text{нст}}(\omega + (n-m)\omega_0, \mathbf{k})}{\varepsilon(\omega + n\omega_0, \mathbf{k})}. \quad (43.12)$$

Таким образом, в нулевом приближении по  $m_e/m_i$  мы выразили  $\delta E(\omega, \mathbf{k})$  через фурье-компоненты  $\delta E^{\text{нст}}(\omega, \mathbf{k})$ . Из (43.12) с уче-

том разложения (43.3) находим выражение для пространственной компоненты Фурье флуктуации поля

$$\delta \mathbf{E}(\mathbf{k}, t) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)_{\mathbf{k}, \tau} \exp\{-ia_e[\sin \omega_0(t - \tau) - \sin \omega_0 t]\} \times \\ \times \delta \mathbf{E}^{\text{нст}}(\mathbf{k}, t - \tau) d\tau. \quad (43.13)$$

Здесь использовано обозначение

$$\frac{1}{\varepsilon(\omega, \mathbf{k})} = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)_{\mathbf{k}, \tau} e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (43.14)$$

С помощью решения (43.13) и выражения (42.11) для  $(\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}, t}^{\text{нст}}$  находим выражение для пространственной спектральной плотности флуктуаций поля

$$(\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\mathbf{k}, t} = \frac{(4\pi)^2 e^2}{k^2} \left\{ \int d\mathbf{P} \frac{n_e F_e(\mathbf{P})}{|\varepsilon(\mathbf{kV}, \mathbf{k})|^2} + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} d\tau \int_0^{\infty} d\tau' \int d\mathbf{P} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)_{\mathbf{k}, \tau} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)_{\mathbf{k}, \tau'}^* \exp(i\mathbf{kV}(\tau - \tau') - \right. \\ \left. - ia_e[\sin \omega_0(t - \tau) - \sin \omega_0(t - \tau')]) n_i F_i(\mathbf{P}) \right\}. \quad (43.15)$$

Первый член в этом выражении определяет вклад электронов, а второй — ионов. Вклад ионов в спектральную плотность явно зависит от быстрого времени. Производя в (43.15) усреднение за период  $2\pi/\omega_0$ , получим [33]

$$(\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\mathbf{k}, t} = \\ = \frac{(4\pi)^2 e^2}{k^2} \left\{ \int d\mathbf{P} \frac{n_e F(\mathbf{P}, t)}{|\varepsilon(\mathbf{kV}, \mathbf{k})|^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n^2(a_e) \frac{n_i}{|\varepsilon(n\omega_0, \mathbf{k})|^2} \right\}. \quad (43.16)$$

При получении этого выражения учтено, что при  $m_i = \infty$  функция распределения ионов  $F_i(\mathbf{v}) = \delta(\mathbf{v})$ .

Выражение (43.16) в нулевом приближении по  $m_e/m_i$  определяет усредненное за период распределение энергии электромагнитных флуктуаций в плазме, находящейся в высокочастотном электрическом поле.

#### § 44. Кинетические уравнения для плазмы в высокочастотном электрическом поле

Установим вид кинетического уравнения для функции  $F_a(\mathbf{P}, t)$ . Интеграл столкновений определяется согласно (41.7) пространственной спектральной плотностью флуктуаций  $\delta N_a, \delta \mathbf{E}$ .

Для определения этой спектральной плотности обратимся к уравнениям (43.1) для функций  $\delta N_a(\mathbf{k}, \mathbf{P} - \frac{e_a}{m_a} \mathbf{E} \cos \omega_0 t, t)$ . Умножим (43.1) на  $\delta \mathbf{E}^*(\mathbf{k}, t)$  и усредним. В результате получим выражение для искомой спектральной плотности. Представим его в виде суммы двух членов. Первый определяется спектральной плотностью флуктуаций поля. Выражение для этой функции нам известно. Второй член имеет вид

$$(\delta N_a^{\text{нст}} \delta \mathbf{E})_{\mathbf{k}, \mathbf{P} - \frac{e_a}{\omega_0} \mathbf{E} \cos \omega_0 t, t} \quad (44.1)$$

Подставим сюда выражение для  $\delta \mathbf{E}(\mathbf{k}, t)$  из (43.13), чтобы выразить функцию (44.1) через спектральную плотность флуктуаций  $\delta N_a^{\text{нст}}$ ,  $\delta \mathbf{E}^{\text{нст}}$ , которая нам уже известна.

Таким образом, нахождение интеграла столкновений  $I_a(\mathbf{P}, t)$  сводится к подстановке известных выражений. Приведем результат.

Для пространственно однородной плазмы кинетическое уравнение для функции распределения электронов (ионы неподвижны, так как рассматривается приближение  $m_i = \infty$ ) имеет вид

$$\partial F_e / \partial t = I_e(\mathbf{P}, t) = I_{ee} + I_{ei}. \quad (44.2)$$

Здесь

$$I_{ee} = 2e^4 n \frac{\partial}{\partial P_\alpha} \int \frac{k_\alpha k_\beta}{k^4} \frac{\delta(\mathbf{kV} - \mathbf{kV}')}{|\varepsilon(\mathbf{kV}, \mathbf{k})|^2} \left[ \frac{\partial F_e}{\partial P_\beta} F_e - \frac{\partial F_e}{\partial P'_\beta} F_e \right] d\mathbf{k} d\mathbf{P}' \quad (44.3)$$

— интеграл столкновений электронов с электронами. Это выражение по форме совпадает с интегралом столкновений Балееску — Ленарда. Оно не зависит явно от электрического поля. Эта зависимость появляется лишь при переходе к функциям распределения  $f_a$  (см. (41.5)).

Интеграл столкновений электронов с ионами при  $m_i = \infty$  определяется выражением

$$I_{ei} = \frac{2e^2 e_i^2 n_i}{\pi} \frac{\partial}{\partial P_\alpha} \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d\tau' \int_0^\infty d\tau'' \int d\mathbf{k} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^4} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)_{\mathbf{k}, \tau'}^* \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)_{\mathbf{k}, \tau} \times \\ \times \exp\{-\Delta\tau - i\mathbf{kV}\tau + ia_e[\sin \omega_0(t - \tau') - \sin \omega_0(t - \tau - \tau'')]\} \times \\ \times \frac{\partial F_e(\mathbf{P}, t)}{\partial P_\beta}. \quad (44.4)$$

Используя разложение (43.3), это выражение можно представить в виде [33]

$$I_{ei} = 2e^2 e_i^2 n_i \frac{\partial}{\partial P_\alpha} \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \int d\mathbf{k} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^4} I_n(a_e) I_m(a_e) \times \\ \times \frac{\delta(m\omega_0 - \mathbf{kV})}{\varepsilon(m\omega_0, \mathbf{k}) \varepsilon^*(n\omega_0, \mathbf{k})} \exp[i(n - m)\omega_0 t] \frac{\partial F_e(\mathbf{P}, t)}{\partial P_\beta}. \quad (44.5)$$

Выражения (44.4), (44.5) содержат все гармоники частоты  $\omega_0$ . Произведем в выражении (44.5) усреднение по периоду. Тогда

$$I_{ei} = 2e^2 e_i^2 n_i \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d\mathbf{k} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^1} I_n^2(\alpha_e) \frac{\delta(n\omega_0 - \mathbf{kV})}{|e(n\omega_0, \mathbf{k})|^2} \frac{\partial F_e(\mathbf{P}, t)}{\partial P_\beta}. \quad (44.6)$$

Напомним, что это выражение получено при условии  $m_i = \infty$ , поэтому оно не содержит функцию распределения ионов.

Рассмотрим свойства интеграла столкновений  $I_e$ . Нетрудно проверить, что

$$n_e \int \varphi(\mathbf{P}) I_e d\mathbf{P} = 0 \quad \text{при } \varphi = 1, \mathbf{P}. \quad (44.7)$$

Эти свойства обеспечивают выполнение законов сохранения числа частиц и импульса плазмы.

Рассмотрим уравнение баланса энергии. Для идеальной плазмы интеграл столкновений не дает вклада в уравнение баланса для средней кинетической энергии, поэтому из уравнения (41.1) следует

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_a n_a \int \frac{p^2}{2m_a} f_a d\mathbf{p} = \mathbf{jE}. \quad (44.8)$$

Перейдем от функции  $f_a$  к функции  $F_a$ . Оставляя в  $F_a$  лишь медленно меняющуюся часть, получим при  $m_i = \infty$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_a n_a \int \frac{p^2}{2m_a} \dot{f}_a d\mathbf{p} = \frac{\partial}{\partial t} n_e \int \frac{p^2}{2m_e} F_e d\mathbf{P}. \quad (44.9)$$

Из этого уравнения, используя (44.2), находим

$$\frac{\partial}{\partial t} n_e \int \frac{p^2}{2m_e} F_e d\mathbf{P} = n_e \int \frac{p^2}{2m_e} I_{ei} d\mathbf{P}. \quad (44.10)$$

Из формул (44.10), (44.8) следует равенство

$$n_e \int \frac{p^2}{2m_e} I_{ei} d\mathbf{P} = \mathbf{jE} \equiv \sigma(\mathbf{E}) \frac{\mathbf{E}^2}{2}, \quad (44.11)$$

выражающее средний баланс энергии в плазме при наличии внешнего электрического поля.

Мы провели расчет флуктуаций  $\delta N_a$ ,  $\delta \mathbf{E}$  и нашли соответствующие интегралы столкновений в нулевом приближении по отношению масс  $m_e/m_i$ . Это приближение достаточно, в частности, для расчета электрической проводимости (см. следующий параграф). Во многих случаях, например, при расчете релаксации температур, спектров ионно-звуковых волн, это приближение, естественно, не является достаточным.

Развитый выше метод может быть использован для расчета флуктуаций и определения интеграла столкновений для плазмы в сильном высокочастотном поле и при конечном отношении масс. Это сделано в работе [48]. Приведем здесь для иллюстрации выражение для интеграла столкновений  $I_{ei}$  для частот внешнего поля  $\omega_0 \gg kv_{Te}$ :

$$I_{ei} = 2e_e^2 e_i^2 n_i \frac{\partial}{\partial P_\alpha} \int d\mathbf{P}' d\mathbf{k} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^4} I_0^2(a_{ei}) \frac{\delta(\mathbf{kV} - \mathbf{kV}')}{|e_E(\mathbf{kV}, \mathbf{k})|^2} \times \\ \times \left( \frac{\partial}{\partial P_\beta} - \frac{\partial}{\partial P'_\beta} \right) F_e(\mathbf{P}, t) F_i(\mathbf{P}', t). \quad (44.12)$$

Здесь

$$e_E(\omega, \mathbf{k}) = e(\omega, \mathbf{k}) + [1 - I_0^2(a_{ei})] 4\pi\alpha_e 4\pi\alpha_i.$$

Функции  $e(\omega, \mathbf{k})$ ,  $\alpha_e$ ,  $\alpha_i$ ,  $a_{ei}$  определяются формулами (43.6).

При отсутствии внешнего поля ( $E = 0$ ) выражение (44.12) совпадает с соответствующим интегралом столкновений Бале-ску — Ленарда. При  $m_e/m_i = 0$  выражение (44.12) переходит (с учетом  $\omega_0 \gg kv_{Te}$ ) в (44.6).

Используем равенство (44.11) для определения электрической проводимости плазмы.

#### § 45. Проводимость плазмы в сильном высокочастотном электрическом поле

Для определения проводимости  $\sigma(\mathbf{E})$  подставим в равенство (44.11) выражение (44.6) для  $I_{ei}$ . В качестве функции  $F_e$  возьмем распределение Максвелла. Оно устанавливается за счет электрон-электронных столкновений. Выполняя в (44.11) интегрирование по  $\mathbf{P}$ , получим следующее выражение:

$$\frac{\sigma(\mathbf{E}) \mathbf{E}^2}{2} = \frac{4 \sqrt{2\pi} e^2 n_e \sum_a e_a^2 n_a}{(\kappa T_e)^{3/2}} \omega_0^2 \sqrt{m_e} \times \\ \times \sum_n \int_0^{k_{\max}} \frac{dk}{k^3} \exp\left(-n^2 \frac{m\omega_0^2}{2\kappa T_e k^2}\right) \int_0^1 \frac{n^2 I_n^2(a_e x)}{|e(n\omega_0, \mathbf{k})|^2} dx, \\ a_e = \frac{\mathbf{k}e\mathbf{E}}{m_e \omega_0^2}. \quad (45.1)$$

Рассмотрим предельный случай слабого поля. Из формулы (45.1) следует, что поле можно считать слабым, если во всей

области интегрирования по  $k$   $|a_e| \ll 1$ , т. е.

$$|a_e| = \frac{k|e|E}{m_e \omega_0^2} \ll 1 \text{ при } k_{\min} < k < k_{\max}. \quad (45.2)$$

При  $\omega_0 \sim \omega_e$ ,  $k_{\max}/k_{\min} \sim r_D/r_{\min} \sim 1/\mu$  имеем

$$\frac{k_{\max}|e_e|E}{m_e \omega_e^2} \sim \frac{eEr_D}{\kappa T} \frac{1}{\mu} \sim \frac{eEl}{\kappa T}, \quad l \sim r_D/\mu.$$

Здесь  $l$  — длина свободного пробега при электрон-электронных столкновениях.

Таким образом, поле можно считать слабым при выполнении условия

$$|e_e|El/\kappa T \ll 1, \quad (45.3)$$

т. е. работа поля на длине свободного пробега должна быть малой по сравнению с  $\kappa T$ .

В слабом поле правую часть равенства (45.1) можно разложить по  $E$ . Разложение начинается с  $E^2$ . Сокращая на  $E^2/2$ , получим выражение для проводимости в слабом поле с учетом поляризации плазмы

$$\sigma = \frac{\sqrt{2\pi}}{3\pi} \frac{\omega_e^2}{\omega_0^2} \frac{e^2}{(\kappa T_e)^{3/2}} \frac{\sum_a e_a^2 n_a}{\sqrt{m_e}} \int_0^{k_{\max}} \frac{dk}{k} \frac{\exp\left(-\frac{m_e \omega_0^2}{2\kappa T_e k^2}\right)}{|\varepsilon(\omega_0, k)|^2}. \quad (45.4)$$

Это выражение соответствует результату работы Переля и Элиашберга [34], в которой рассчитывалась проводимость равновесной плазмы.

При  $\omega_0 \gg \omega_e$  эффект поляризации можно не учитывать. В этом случае обрезание области интегрирования в (45.4) происходит за счет экспоненциального множителя ( $k_{\min} \sim \omega_0/v_{Te}$ ).

В обратном предельном случае, когда  $\omega_0 \ll \omega_e$ , эффект поляризации оказывается существенным и выражение (45.4) принимает вид

$$\sigma = \frac{\sqrt{2\pi}}{3\pi} \frac{\omega_e^2}{\omega_0^2} \frac{e^2}{(\kappa T_e)^{3/2}} \frac{\sum_a e_a^2 n_a}{\sqrt{m_e}} \int_0^{k_{\max}} \frac{dk}{k} \frac{1}{1 + r_D^2 k^2}. \quad (45.5)$$

Рассмотрим теперь случай сильного поля, когда  $|a_e| \gg 1$ . Из (45.1) находим следующее выражение для проводимости:

$$\sigma = \frac{8\sqrt{2\pi}|e_e|n_e \sum_a e_a^2 n_a}{(\kappa T_e)^{3/2}} m_e^{1/2} \frac{\omega_0^4}{E^3} \left[ A(\omega_0) + B(\omega_0) \ln \frac{k_{\max}|e_e|E}{m_e \omega_0^2} \right]. \quad (45.6)$$

Здесь использованы обозначения

$$A(\omega_0) = \sum_n \int_0^{k_{\max}} \frac{dk}{k^1} \frac{\exp\left[-n^2 \frac{m_e \omega_0^2}{2\kappa T_e k^2}\right]}{|\varepsilon(n\omega_0, k)|^2} n^2 \left\{ \int_0^1 I_n^2(y) dy + \int_1^\infty \left[ I_n^2(y) - \frac{1}{\pi y} \right] dy + \frac{1}{\pi} \ln \frac{k}{k_{\max}} \right\}, \quad (45.7)$$

$$B(\omega_0) = \sum_n \int_0^{k_{\max}} \frac{dk}{k^1} \frac{\exp\left[-n^2 \frac{m_e \omega_0^2}{2\kappa T_e k^2}\right]}{|\varepsilon(n\omega_0, k)|^2} \frac{n^2}{\pi}. \quad (45.8)$$

При  $\omega_0 \ll \omega_e$  учет поляризации обеспечивает в этих выражениях сходимость интегралов.

При  $\omega_0 \gg \omega_e$  в выражениях (45.7), (45.8) можно пренебречь поляризацией. Если также учесть, что

$$A(\omega_0) \ll B(\omega_0) \ln \frac{k_{\max} |e_e| E}{m_e \omega_0^2},$$

то выражение (45.6) примет вид [35]

$$\sigma = \frac{32 \sqrt{\pi} \omega_0}{\pi E^3} |e_e| n_e \sum_a e_a^2 n_a \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} x - x e^{-x^2} \right\} \Bigg|_{x=r_{\min}}^{x=\infty} \sqrt{\frac{m_e \omega_0^2}{2\kappa T_e}} \times \ln \frac{k_{\max} |e_e| E}{m_e \omega_0^2}. \quad (45.9)$$

Заметим, что условие сильного поля, при котором справедливы выражения (45.6), (45.9), означает, что

$$eEr_D/\kappa T \gg 1.$$

Это условие является очень жестким. Зависимость проводимости от поля имеет место уже в значительно более слабых полях, когда  $eEr_D/\kappa T \ll 1$ , но  $eEl/\kappa T \gtrsim 1$ . Это следует из критерия слабого поля (45.2).

При расчете проводимости плазмы в сильном поле мы предполагали, что плазма устойчива. В нулевом приближении по отношению масс  $m_e/m_i$  это действительно так. Однако с учетом конечности этого отношения возможно возникновение аperiodической неустойчивости (см. § 8, [17]). В неизотермической плазме возможны параметрические неустойчивости (см. §§ 9, 10 в [17]). Неустойчивости имеют место по отношению к возмущениям с длинами волн, большими радиуса Дебая.



В связи с возможностью появления неустойчивостей возникает вопрос. Может ли проявиться найденная нами нелинейная зависимость электрической проводимости от поля?

Из изложенного следует, что нелинейная зависимость проводимости от поля проявляется уже в сравнительно слабых полях, когда  $eEl \sim kT$  ( $l$  — длина свободного пробега). Это условие можно записать в виде  $E^2/nkT \sim \mu^2$  ( $\mu$  — плазменный параметр). Критическое поле при аperiodической неустойчивости таково, что  $E^2/nkT \geq \mu$  (см. (8.9) в [17]). Таким образом, при  $\mu \ll 1$  нелинейная зависимость проводимости от поля проявляется раньше, чем наступает аperiodическая неустойчивость.

В неизотермической плазме параметрическая неустойчивость наступает при  $E^2/nkT \geq \sqrt{m_e/m_i} \mu$ . При  $\mu \ll \sqrt{m_e/m_i}$  нелинейная зависимость проявляется раньше, чем наступает неустойчивость.

Отметим, что в работе [48] проведено вычисление времени релаксации температуры для плазмы в сильном поле.

## § 46. Низкие частоты

Рассмотрим кинетическое уравнение для случая низких частот, когда

$$\omega_0 \ll \omega_e \sim v_{te}/r_D. \quad (46.1)$$

Отношение частоты столкновений электронов к частоте Ленгмюра порядка плазменного параметра  $\mu$ , поэтому при условии (46.1) частота  $\omega_0$  может быть сравнима с частотой столкновений.

Зададим поле в виде

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E} \cos \omega_0 t, \quad (46.2)$$

это позволит рассмотреть и случай постоянного поля. При этом вместо (42.13), (42.10) надо использовать выражения

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} + \frac{e_a \mathbf{E}}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \quad (46.3)$$

$$\int_t^{t-\tau} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \mathbf{E} \cos \omega_0 t'' = \frac{\mathbf{E}}{\omega_0} [\cos \omega_0 t - \cos \omega_0 (t - \tau)]. \quad (46.4)$$

При условии (46.1) в правой части (46.4) можно разложить по  $\tau \omega_0$ . Ограничиваясь первыми двумя членами разложения, получим

$$\cos \omega_0 (t - \tau) - \cos \omega_0 t = \omega_0 \tau \sin \omega_0 t - \frac{(\omega_0 \tau)^2}{2} \cos \omega_0 t. \quad (46.5)$$

Запишем в этом приближении уравнение для фурье-компоненты  $\delta N_a$ . Из уравнения (43.1) с учетом (46.2)–(46.5) получим

$$\begin{aligned} \delta N_a(\mathbf{k}, \mathbf{P} + \frac{e_a}{\omega_0} \mathbf{E} \sin \omega_0 t, t) = \delta N_a^{\text{нст}}(\mathbf{k}, \mathbf{P} + \frac{e_a}{\omega_0} \mathbf{E} \sin \omega_0 t, t) - \\ - e_a n_a \int_0^\infty \exp[-\Delta\tau - i\mathbf{k}(\mathbf{V} + \frac{e_a}{m_a \omega_0} \mathbf{E} \sin \omega_0 t) + ia_a(t)(\omega_0 \tau)^2/2] \times \\ \times \delta \mathbf{E}(\mathbf{k}, t - \tau) \frac{\partial i_a(\mathbf{P} + \frac{e_a}{\omega_0} \mathbf{E} \sin \omega_0(t - \tau), t - \tau)}{\partial \mathbf{P}} d\tau. \end{aligned} \quad (46.6)$$

Перейдем в этом уравнении к обычным переменным  $\mathbf{p}$  (см. (46.3)) и учтем, что при условии (46.1)

$$\sin \omega_0(t - \tau) - \sin \omega_0 t = -\cos(\omega_0 t) \omega_0 \tau. \quad (46.7)$$

Тогда из (46.6) получим

$$\begin{aligned} \delta N_a(\mathbf{k}, \mathbf{p}, t) = \delta N_a^{\text{нст}}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, t) - \\ - e_a n_a \int_0^\infty \exp[-\Delta\tau - i\mathbf{k}\mathbf{v}\tau + ia_a(t)\omega_0^2\tau^2/2] \times \\ \times \delta \mathbf{E}(\mathbf{k}, t - \tau) \frac{\partial i_a(\mathbf{p} - e_a \mathbf{E}(t)\tau, t - \tau)}{\partial \mathbf{p}} d\tau, \end{aligned} \quad (46.8)$$

где

$$a_a(t) = a_a \cos \omega_0 t. \quad (46.9)$$

При интегрировании по  $\tau$  в (46.8) основной вклад приходится на область

$$\tau < \tau_{\text{max}} \sim 1/k_{\text{max}} v_{\tau_e} \sim 1/\omega_e. \quad (46.10)$$

При условии (46.1)

$$\omega_0 \tau_{\text{max}} \ll 1, \quad (46.11)$$

поэтому

$$\tau_{\text{max}} \frac{\partial i_a}{\partial t} \ll i_a. \quad (46.12)$$

На этом основании в уравнении (46.8) можно произвести разложение по  $\tau \partial/\partial t$ . В нулевом приближении (идеальная плазма) можно совсем пренебречь запаздыванием функций  $f_a$ .

Интеграл столкновений  $I_a$  определяется спектральной плотностью  $(\delta N_a \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}}$  для области частот  $\omega \geq \omega_L$  и  $k > 1/r_D$ . Вклад крупномасштабных флуктуаций в интеграл столкновений будет рассмотрен особо в гл. 11. Вследствие этого при условии (46.1) можно при расчете спектральных плотностей не учиты-

вать в (46.8) явную зависимость от времени, входящую через  $\mathbf{E}(t)$ ,  $a_a(t)$ . Тогда из (46.8) получаем

$$\begin{aligned} \delta N_a(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) = & \delta N_a^{\text{нст}}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) - \\ & - e_a n_a \int_0^{\infty} \exp[-\Delta\tau + i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\tau + ia_a(t)\omega_0^2\tau^2/2] \delta\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) \times \\ & \times \frac{\partial f_a(\mathbf{p} - e_a\mathbf{E}(t)\tau, t)}{\partial \mathbf{p}} d\tau. \end{aligned} \quad (46.13)$$

Используя уравнение (41.2), с помощью (46.13) получим уравнение для  $\delta\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})$ :

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \delta\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{i\mathbf{k}}{k^2} 4\pi \sum_a e_a \int \delta N_a^{\text{нст}}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) d\mathbf{p} \equiv \delta\mathbf{E}^{\text{нст}}. \quad (46.14)$$

Диэлектрическая проницаемость определяется выражением

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = & 1 - i \sum_a \frac{4\pi e_a^2 n_a}{k^2} \iint_0^{\infty} \exp[-\Delta\tau + i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\tau + \\ & + ia_a(t)\omega_0^2\tau^2/2] \left( \mathbf{k} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} \right)_{\mathbf{p} - e_a\mathbf{E}(t)\tau, t} d\tau d\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (46.15)$$

Выражение для спектральной плотности флуктуаций  $\delta\mathbf{E}^{\text{нст}}$  можно получить из (42.8), если принять во внимание (41.5) и равенства (46.3)–(46.5):

$$\begin{aligned} (\delta\mathbf{E} \delta\mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}}^{\text{нст}} = & \sum_a \frac{(4\pi)^2 e_a^2 n_a}{k^2} 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} d\tau \times \\ & \times \int d\mathbf{p} \exp[-\Delta\tau + i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\tau + ia_a(t)\omega_0^2\tau^2/2] f_a(\mathbf{p} - e_a\mathbf{E}(t)\tau, t). \end{aligned} \quad (46.16)$$

Это выражение можно записать в более удобной форме. Для этого произведем замену переменных интегрирования

$$\mathbf{p} - e_a\mathbf{E}(t)\tau \rightarrow \mathbf{p}. \quad (46.17)$$

С учетом (46.9) получим из (46.16)

$$\begin{aligned} (\delta\mathbf{E} \delta\mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}}^{\text{нст}} = & \sum_a \frac{(4\pi)^2 e_a^2 n_a}{k^2} 2 \int_0^{\infty} d\tau \times \\ & \times \int d\mathbf{p} \cos \left[ (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\tau - a_a(t) \frac{\omega_0^2 \tau^2}{2} \right] f_a(\mathbf{p}, t). \end{aligned} \quad (46.18)$$

Из уравнения (46.14) следует, что спектральная плотность флуктуаций поля выражается через функции (46.15), (46.18) обычным образом:

$$(\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{(\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}}^{\text{ИСТ}}}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2}. \quad (46.19)$$

Теперь уже все подготовлено для нахождения интеграла столкновений

$$I_a(\mathbf{p}, t) = -\frac{e_a}{n_a} \frac{1}{(2\pi)^4} \int \text{Re}(\delta N_a \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}, p} d\omega d\mathbf{k}. \quad (46.20)$$

Запишем сразу результат:

$$\begin{aligned} I_a(\mathbf{p}, t) = & \sum_b \frac{2e_a^2 e_b^2 n_b}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial p_i} \int d\omega d\mathbf{k} dp' \frac{k_i k_j}{k^4 |\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} \times \\ & \times \text{Re} \int_0^\infty d\tau \exp[-\Delta\tau + i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\tau + ia_a(t)\omega_0^2\tau^2/2] \times \\ & \times \text{Re} \int_0^\infty d\tau' \exp[-\Delta\tau' + i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}')\tau' + ia_b(t)\omega_0^2\tau'^2/2] \times \\ & \times \left\{ \frac{\partial f_a}{\partial p_j} f_b - \frac{\partial f_b}{\partial p_j} f_a \right\}_{p_a - e_a \mathbf{E}(t)\tau', p_b - e_b \mathbf{E}(t)\tau'}. \end{aligned} \quad (46.21)$$

При  $\mathbf{E}(t) = 0$  это выражение совпадает с интегралом столкновений Балеску — Ленарда (37.1).

Нетрудно убедиться, что интеграл столкновений (46.21) обладает свойствами

$$I(t) = \sum_a n_a \int \varphi_a(\mathbf{p}) I_a(\mathbf{p}, t) d\mathbf{p} = 0 \quad \text{при } \varphi_a = 1, \mathbf{p}, p^2/2m_a. \quad (46.22)$$

Интеграл столкновений Балеску — Ленарда и соответствующий ему интеграл столкновений (46.21) получены в первом приближении по плазменному параметру  $\mu$ . Учет динамической поляризации обеспечивает в них сходимость интегралов по  $k$  при малых значениях волновых чисел — больших расстояниях между заряженными частицами.

Вклад взаимодействия на малых расстояниях учитывается в этих интегралах столкновений не вполне корректно. Следствием этого является логарифмическая расходимость интегралов при больших  $k$ . Из-за логарифмического характера расходимости эта некорректность для идеальной плазмы не является существенной. Однако для неидеальной плазмы вклад взаимо-

действия частиц на малых расстояниях в недиссипативные характеристики является существенным. Вследствие этого возникает задача получения интегралов столкновений, которые учитывали бы достаточно корректно вклады взаимодействия частиц как на больших, так и на малых расстояниях. Мы увидим (см. §§ 55, 56), что эту задачу можно решить, если вместо точного учитывать усредненный вклад динамической поляризации. Это соответствует введению эффективного потенциала.

### § 47. Эффективный потенциал, учитывающий усредненную динамическую поляризацию плазмы

Из выражения для функции  $\text{Re}(\delta V_a \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}, p}$ , определяющей интеграл столкновений Балеску — Ленарда (37.1), видно, что за счет поляризации происходит следующая перенормировка компоненты Фурье потенциала взаимодействия заряженных частиц:

$$v_{ab}(\mathbf{k}) \rightarrow \frac{v_{ab}(\mathbf{k})}{|\epsilon(\mathbf{k}v, \mathbf{k})|^2}, \quad v_{ab}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi e_a e_b}{k^2}. \quad (47.1)$$

На этом основании эффективный потенциал, учитывающий усредненную по скоростям динамическую поляризацию, можно определить выражением [7]

$$\tilde{v}_{ab}(\mathbf{k}) = v_{ab}(\mathbf{k}) \frac{\sum_a e_a^{\wedge} n_a}{\sum_c e_c^{\wedge} n_c} \int \frac{f_a(\mathbf{p}, t)}{|\epsilon(\mathbf{k}v, \mathbf{k})|^2} d\mathbf{p}. \quad (47.2)$$

Рассмотрим это выражение в приближении локального равновесия, когда функции  $f_a$  — распределения Максвелла с  $T_a = T$ .

Используя равенство (36.19) и определение радиуса Дебая, получим из (47.2) следующее выражение:

$$\tilde{v}_{ab}(k) = v_{ab}(k) r_D^2 k^2 / (1 + r_D^2 k^2). \quad (47.3)$$

Отсюда, используя значение интеграла (36.23), находим

$$\tilde{\Phi}_{ab}(r) = \Phi_{ab}(r) e^{-r/r_D}, \quad \Phi_{ab}(r) = e_a e_b / r. \quad (47.4)$$

Таким образом, в состоянии равновесия эффективный потенциал совпадает с потенциалом Дебая.

Эффективный потенциал можно выразить через спектральную плотность флуктуаций поля  $(\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\mathbf{k}}$ . Для этого используем выражение (35.7). В результате

$$\tilde{v}_{ab}(\mathbf{k}) = \frac{e_a e_b}{\sum_c e_c^{\wedge} n_c} \frac{(\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\mathbf{k}}}{4\pi} = v_{ab}(\mathbf{k}) \frac{(\delta q \delta q)_{\mathbf{k}}}{\sum_c e_c^{\wedge} n_c}. \quad (47.5)$$

Здесь  $(\delta q \delta q)_{\mathbf{k}}$  — спектральная плотность флуктуаций заряда.

Выражение (47.5) можно принять за определение эффективного потенциала при использовании его в более общих случаях, например, при наличии внешних полей.

Перепишем выражение (47.5) в виде

$$\tilde{v}_{ab}(\mathbf{k}) = \frac{v_{ab}(\mathbf{k})}{\sum_c e_c^2 n_c} \frac{1}{2\pi} \int \frac{(\delta q \delta q)_{\omega, \mathbf{k}}^{\text{HCT}}}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} d\omega. \quad (47.6)$$

Затем учтем, что

$$(\delta q \delta q)_{\omega, \mathbf{k}}^{\text{HCT}} = \frac{k^2}{(4\pi)^2} (\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}}^{\text{HCT}}. \quad (47.7)$$

Используя эти равенства, покажем, что для идеального газа, т. е. при  $g_{ab} = 0$ , эффективный потенциал совпадает с потенциалом взаимодействия. Для этого заметим, что по определению  $\delta q$

$$(\delta q \delta q)_{\mathbf{k}} = \sum_{ab} e_a e_b \int (\delta N_a \delta N_b)_{\mathbf{k}, p_1, p_2} dp_1 dp_2.$$

Для идеального газа из (26.11) следует, что

$$(\delta N_a \delta N_b)_{\mathbf{k}, p_1, p_2} = \delta_{ab} n_a \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) f_a. \quad (47.8)$$

Из (47.7), (47.8) следует, что при  $g_{ab} = 0$

$$(\delta q \delta q)_{\mathbf{k}} = \sum_a e_a^2 n_a. \quad (47.9)$$

Подставляя (47.9) в (47.5), убеждаемся, что при  $g_{ab} = 0$   $\tilde{\Phi}_{ab} = \Phi_{ab}$ .

Из сравнения выражений (47.1), (47.6) видно, что при введении эффективного потенциала в интеграле столкновений происходит замена:

$$\frac{v_{ab}(\mathbf{k})}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} \rightarrow v_{ab}(\mathbf{k}) \frac{1}{\sum_c e_c^2 n_c} \frac{1}{2\pi} \int \frac{(\delta q \delta q)_{\omega}^{\text{HCT}}}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} d\omega \equiv v_{ab}(\mathbf{k}) \frac{1}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} \quad (47.10)$$

т. е. происходит усреднение функции  $1/|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2$  по  $\omega$  с функцией распределения

$$f(\omega) = \frac{1}{\sum_c e_c^2 n_c} (\delta q \delta q)_{\omega}^{\text{HCT}}. \quad (47.11)$$

Используя это, введем эффективный потенциал в интеграле столкновений (46.21). Произведем в (46.21) замену (47.10) и выполним после этого в (46.21) интегрирование по  $\omega$  и  $\tau$ .

В результате получим выражение

$$I_a(\mathbf{p}, t) = \sum_b \frac{2e_a^2 e_b^2 n_b}{\pi} \frac{\partial}{\partial p_i} \int d\mathbf{k} d\mathbf{p}' \int_0^\infty d\tau \frac{k_i k_j}{k^i} \frac{1}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} \times \\ \times \cos \left[ (\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}') \tau - a_{ab}(t) \frac{(\omega_0 \tau)^2}{2} \right] \left\{ \frac{\partial f_a}{\partial p_i} f_b - \frac{\partial f_b}{\partial p'_i} f_a \right\}_{\substack{p - e_a E(t) \tau \\ p' - e_b E(t) \tau}}, \quad (47.12)$$

$$a_{ab}(t) = \left( \frac{e_a}{m_a} - \frac{e_b}{m_b} \right) \frac{\mathbf{k}\mathbf{E}(t)}{\omega_0^2}.$$

Из формул (47.10), (47.7), (46.18) следует, что

$$\frac{1}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} = \\ = \frac{1}{\sum_c e_c^2 n_c} \int \frac{\sum_a e_a^2 n_a \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{p} \cos \left[ (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \tau - a_a(t) \frac{\omega_0^2 \tau^2}{2} \right]}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (47.13)$$

Используем приближенное выражение (47.12) для интеграла столкновений при расчете проводимости плазмы.

#### § 48. Электрическая проводимость. Эффективное (действующее) поле

Найдем уравнение баланса для плотности электрического тока  $\mathbf{j} = \sum_a e_a n_a \int \mathbf{v} f_a d\mathbf{p}$ . Из кинетического уравнения (41.1) следует, что

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \sum_a \frac{e_a^2 n_a}{m_a} \mathbf{E}(t) + \sum_a e_a n_a \int \mathbf{v} I_a d\mathbf{p}. \quad (48.1)$$

Преобразуем второй член правой части этого уравнения. Подставим в него выражение (47.12), проинтегрируем по частям по  $\mathbf{p}$ , симметризуем относительно  $a, \mathbf{p}; b, \mathbf{p}'$  и проведем замену переменных  $\mathbf{p} - e_a \mathbf{E}(t) \tau \rightarrow \mathbf{p}$ . В результате получим

$$\sum_a e_a n_a \int \mathbf{v} I_a d\mathbf{p} = - \sum_{ab} \frac{e_a^2 e_b^2 n_a n_b}{\pi} \left( \frac{e_a}{m_a} - \frac{e_b}{m_b} \right) \int d\mathbf{k} d\mathbf{p} d\mathbf{p}' \times \\ \times \int_0^\infty d\tau \frac{k}{k^i} \frac{1}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} \cos \left[ (\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}') \tau + a_{ab}(t) \frac{\omega_0^2 \tau^2}{2} \right] \times \\ \times \mathbf{k} \left[ \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} f_b - \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{p}'} f_a \right]. \quad (48.2)$$

Дальнейшие вычисления проводим с функцией

$$f_a = A \exp \left[ - \frac{m_a (\mathbf{v} - \mathbf{u}_a)^2}{2\kappa T} \right]. \quad (48.3)$$

Тогда в (48.2)

$$\mathbf{k} \left\{ \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} f_b - \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{p}'} f_a \right\} = - \frac{1}{\kappa T} [(\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}') - (\mathbf{k}\mathbf{u}_a - \mathbf{k}\mathbf{u}_b)] f_a f_b. \quad (48.4)$$

1. Рассмотрим результат подстановки первого члена из (48.4) в (48.2). Учитывая, что

$$\int_0^\infty \cos \left[ \mathbf{k}(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \tau + a_{ab}(t) \frac{\omega_0^2 \tau^2}{2} \right] d \left[ \mathbf{k}(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \tau + a_{ab}(t) \frac{\omega_0^2 \tau^2}{2} \right] = 0,$$

запишем первую часть выражения (48.2) в виде

$$\left[ \sum_a e_a n_a \int \mathbf{v} I_a d\mathbf{p} \right]_1 = a \mathbf{E} \cos \omega_0 t. \quad (48.5)$$

Здесь введено обозначение

$$a = - \sum_{ab} \frac{e_a^2 e_b^2 n_a n_b}{\kappa T} \left( \frac{e_a}{m_a} - \frac{e_b}{m_b} \right) I_1^{ab}. \quad (48.6)_1$$

Через  $I_1^{ab}$  обозначен интеграл

$$I_1^{(ab)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\tau \tau d\mathbf{k} d\mathbf{p} d\mathbf{p}' \int \frac{(\mathbf{k}\mathbf{E}(t))^2}{k^1 (\mathbf{E}(t))^2} \frac{1}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} \times \\ \times \cos \left[ (\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}') \tau + a_{ab}(t) \frac{\omega_0^2 \tau^2}{2} \right] f_a(\mathbf{p}) f_b(\mathbf{p}'). \quad (48.6)_2$$

2. Рассмотрим результат подстановки второго члена из (48.4) в (48.2). Представим вторую часть (48.2) в виде

$$\left( \sum_a e_a n_a \int \mathbf{v} I_a d\mathbf{p} \right)_2 = - \mathbf{v} j. \quad (48.7)$$

Здесь введено обозначение

$$\mathbf{v} = \sum_{ab} \frac{2e_a^2 e_b^2 n_a n_b}{\kappa T (e_a n_a - e_b n_b)} \left( \frac{e_a}{m_a} - \frac{e_b}{m_b} \right) I_2^{ab}, \quad (48.8)$$

где

$$I_2^{ab} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} d\mathbf{p} d\mathbf{p}' \frac{(\mathbf{k}j)^2}{k^1 j^2} \frac{1}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} \times \\ \times \cos \left[ (\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}') \tau + a_{ab}(t) \frac{\omega_0^2 \tau^2}{2} \right] f_a f_b. \quad (48.9)$$

Здесь учтено, что  $j = (e_a n_a - e_b n_b) (\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b) / 2$ .



Выражение (48.5) в сумме с первым членом правой части уравнения (48.1) определяет эффективное поле в плазме при наличии сильного внешнего электрического поля ( $\omega_0 \ll \omega_L$ ) и с учетом усредненной динамической поляризации плазмы.

Второй вклад (48.7) определяет диссипацию в уравнении (48.1) для тока и, следовательно, определяет при тех же условиях проводимость плазмы.

Приведем результаты расчета эффективного поля и проводимости плазмы в слабом поле, но с учетом поляризации.

В слабом поле из (48.6)<sub>2</sub>, (48.9) находим

$$I_1^{ab} = \frac{2\pi}{3} \frac{\mu_{ei}}{\kappa T} r_D \left( \mu_{ei} = \frac{m_e m_i}{m_e + m_i} \right), \quad (48.10)$$

$$I_2^{ab} = \frac{4\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_{ei}}{2\pi\kappa T}} \int_0^{k_{\max}} \frac{dk}{k} \frac{1}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2}. \quad (48.11)$$

Подставляя выражение (48.10) в (48.6)<sub>1</sub>, получим

$$a = -\frac{1}{6} \frac{e^2}{r_D} \frac{e^2 n}{\mu_{ei}}, \quad e = |e_e| = e_i. \quad (48.12)$$

Объединим выражение (48.5) с первым членом правой части уравнения (48.1). Тогда получим выражение для эффективного (действующего) поля [41, 49]

$$\mathbf{E}_{\text{эфф}} = \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{e^2}{r_D \kappa T} \right) \mathbf{E}. \quad (48.13)$$

Отсюда видно, что отличие эффективного поля от внешнего пропорционально плазменному параметру  $\mu \sim e^2/r_D \kappa T$ .

Рассмотрим теперь выражение (48.8) для величины  $\mathbf{v}$ , определяющей затухание тока в плазме.

В слабом поле выражение (47.13) в (48.11) принимает вид

$$\frac{1}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} = \frac{1}{\sum_c e_c^2 n_c} \sum_a \frac{e_a^2 n_a}{a} \int \frac{f_a}{|\varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k})|^2} d\mathbf{p}. \quad (48.14)$$

Поскольку  $f_a$  — распределение Максвелла, то мы можем использовать равенство (36.19). Тогда выражение (48.11) примет вид

$$I_2^{ab} = \frac{4\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_{ei}}{2\pi\kappa T}} \int_0^{k_{\max}} \frac{kr_D r_D dk}{1 + k^2 r_D^2} = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3} \sqrt{\frac{\mu_{ei}}{\kappa T}} \ln \sqrt{1 + r_D^2 k_{\max}^2}. \quad (48.15)$$

Подставим этот результат в (48.8) и запишем выражение для  $\nu$  в виде

$$\nu = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \frac{e^1 n}{\sqrt{\mu_{ei}} (\kappa T)^{3/2}} \ln \sqrt{1 + r_D^2 k_{\max}^2}. \quad (48.16)$$

Из (48.13) следует, что при  $e_i = |e_e|$  эффективное поле не зависит от индекса  $a$ , поэтому уравнение (48.1) с учетом выражений (48.13), (48.7) можно записать в виде

$$\frac{\partial j}{\partial t} + \nu j = \frac{e^2 n}{\mu_{ei}} E_{\text{эфф}}. \quad (48.17)$$

Из этого уравнения следует, что

$$j(\omega) = \frac{e^2 n}{\mu_{ei}} \frac{1}{-i\omega + \nu} E_{\text{эфф}}(\omega) \equiv \sigma(\omega) E_{\text{эфф}}. \quad (48.18)$$

Отсюда находим реальную часть проводимости [7]

$$\text{Re } \sigma(\omega) = \frac{e^2 n}{\mu_{ei}} \frac{\nu}{\omega^2 + \nu^2}, \quad \nu = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \frac{e^1 n}{\sqrt{\mu_{ei}} (\kappa T)^{3/2}} \ln \sqrt{1 + r_D^2 k_{\max}^2}. \quad (48.19)$$

Если использовать интеграл столкновений Ландау, то в выражении для  $\nu$

$$\ln \sqrt{1 + r_D^2 k_{\max}^2} \equiv L' \rightarrow \ln r_D k_{\max} \equiv L; \quad (48.20)$$

$L$  — так называемый кулоновский логарифм. Из (48.20)

$$L' - L = \begin{cases} r_D^2 k_{\max}^2 / 2 & \text{при } r_D k_{\max} \ll 1, \\ 1 - r_D k_{\max} & \text{при } 1 - r_D k_{\max} \ll 1. \end{cases} \quad (48.21)$$

В статическом поле ( $\omega = 0$ ) замена  $L$  на  $L'$  ведет к уменьшению проводимости, так как

$$\sigma(\omega = 0) = \frac{e^2 n}{\mu_{ei} \nu} \sim \frac{1}{L'} \quad \text{и} \quad L' > L. \quad (48.22)$$

## § 49. Флуктуации при наличии магнитного поля

Рассмотрим влияние внешнего магнитного поля на спектральные плотности флуктуаций в нерелятивистской плазме. В этом случае вихревое электромагнитное поле, создаваемое частицами, мало. Поэтому для описания флуктуаций в приближении вторых корреляционных функций можно использовать уравнения (27.7) — (27.10), полагая в них

$$F_{a0} = \frac{e_a}{c} [\nu \mathbf{B}]. \quad (49.1)$$

Таким образом, исходные уравнения для флуктуаций имеют вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_a}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right) (\delta N_a - \delta N_a^{\text{нст}}) = -e_a \delta \mathbf{E} \frac{\partial n_a^i}{\partial \mathbf{p}},$$

$$\text{rot } \delta \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \delta \mathbf{E} = 4\pi \sum_a e_a \int \delta N_a d\mathbf{p}, \quad (49.2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_a}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right) \overline{(\delta N_a \delta N_b)_{x, t, x', t'}}^{\text{нст}} = 0, \quad (49.3)$$

$$\overline{(\delta N_a \delta N_b)_{x, t, x', t'}}^{\text{нст}} \Big|_{t=t'} = \delta_{ab} n_a \delta(x - x') f_a(x', t'). \quad (49.4)$$

В уравнении (49.2) опущен член

$$e_a [\mathbf{v} \delta \mathbf{B}] \frac{\partial i_a}{\partial \mathbf{p}}. \quad (49.5)$$

Это оправдано, если функция распределения зависит лишь от продольной и поперечной по отношению к вектору  $\mathbf{B}$  составляющих импульса, т. е. не зависит от угловой переменной в пространстве импульсов. Здесь будут рассматриваться только такие функции распределения, т. е. функции вида

$$f_a(\mathbf{p}, t) = f_a(p^{\parallel}, p^{\perp}, t). \quad (49.6)$$

При этом условии выражение (49.5) обращается в нуль и уравнение для функции  $f_a$  принимает вид

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} = -\frac{e_a}{n_a} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \int \text{Re} (\delta N_a \delta \mathbf{E})_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, t} d\mathbf{k}. \quad (49.7)$$

Отсюда следует, что функция (49.6) является медленно меняющейся функцией времени. Поэтому для идеальной плазмы, когда можно пренебречь временным запаздыванием функций  $f_a$ , флуктуационный процесс при условии (49.6) является стационарным.

При учете зависимости функции распределения от фазы флуктуационный процесс в сильном магнитном поле не является стационарным. Расчет спектральных плотностей в этом случае может быть проведен по аналогии с тем, как это было сделано в §§ 41—46 при исследовании статистических свойств плазмы при наличии сильного высокочастотного поля.

Приступим к решению уравнений (49.2), (49.3). Для этого рассмотрим сначала решение уравнений характеристик

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e_a}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}], \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{p} = m_a \mathbf{v}. \quad (49.8)$$

Обозначим начальные (в момент  $t'$ ) значения координат и импульсов частиц через  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{P}$ . Тогда решение уравнений (49.8)

можно записать в виде

$$\mathbf{p} = (\mathbf{P}\mathbf{b})\mathbf{b} + [[\mathbf{b}\mathbf{P}]\mathbf{b}] \cos \Omega_a(t-t') + [\mathbf{P}\mathbf{b}] \sin \Omega_a(t-t'), \quad (49.9)$$

$$\begin{aligned} r = R + \frac{(\mathbf{b}\mathbf{P})\mathbf{b}}{m_a}(t-t') + \frac{[[\mathbf{b}\mathbf{P}]\mathbf{b}]}{m_a\Omega_a} \sin \Omega_a(t-t') + \\ + \frac{[\mathbf{P}\mathbf{b}]}{m_a\Omega_a} (1 - \cos \Omega_a(t-t')). \end{aligned} \quad (49.10)$$

Здесь использованы обозначения

$$\mathbf{b} = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|, \quad \Omega_a = |e|B/(m_a c). \quad (49.11)$$

Из (49.9), (49.10) следуют обратные соотношения

$$\mathbf{P} = (\mathbf{b}\mathbf{p})\mathbf{b} + [[\mathbf{b}\mathbf{p}]\mathbf{b}] \cos \Omega_a(t'-t) - [\mathbf{b}\mathbf{p}] \sin \Omega_a(t'-t), \quad (49.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = \mathbf{r} + \frac{(\mathbf{b}\mathbf{p})\mathbf{b}}{m_a}(t'-t) + \frac{[[\mathbf{b}\mathbf{p}]\mathbf{b}]}{m_a\Omega_a} \sin \Omega_a(t'-t) - \\ - \frac{[\mathbf{b}\mathbf{p}]}{\Omega_a} (1 - \cos \Omega_a(t'-t)). \end{aligned} \quad (49.13)$$

Наряду с векторными выражениями нам понадобятся ниже выражения для отдельных компонент.

Направим вектор  $\mathbf{B}||z$ , тогда из (49.9) получим

$$\begin{aligned} p_x = P_x \cos \Omega_a(t-t') + P_y \sin \Omega_a(t-t'), \\ p_y = P_y \cos \Omega_a(t-t') - P_x \sin \Omega_a(t-t'), \quad p_z = P_z. \end{aligned} \quad (49.14)$$

Запишем также в компонентах равенство (49.10):

$$\begin{aligned} r_x = R_x + \frac{P_x}{m_a\Omega_a} \sin \Omega_a(t-t') + \frac{P_y}{m_a\Omega_a} (1 - \cos \Omega_a(t-t')), \\ r_y = R_y + \frac{P_y}{m_a\Omega_a} \sin \Omega_a(t-t') - \frac{P_x}{m_a\Omega_a} (1 - \cos \Omega_a(t-t')), \\ r_z = R_z + v_z(t-t'). \end{aligned} \quad (49.15)$$

Используя решение (49.12), (49.13), находим из уравнения (49.2) выражение для функции  $\delta N_a$

$$\begin{aligned} \delta N_a(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) = \delta N_a^{\text{нст}}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) - e_a n_a \int_0^{\infty} \exp\{-\Delta\tau + \\ + i[\omega\tau + \mathbf{k}(\mathbf{R}(-\tau) - \mathbf{r})]\} (\delta E(0, \mathbf{k}) \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}})_{\mathbf{p}=\mathbf{p}(-\tau), t} \cdot \end{aligned} \quad (49.16)$$

Здесь использовано то, что функция  $f_i$  — медленно меняющаяся функция времени. При  $\mathbf{B} = 0$  это выражение совпадает с (35.2).

Из уравнения (49.2) для  $\delta E$  находим

$$\delta E(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{i\mathbf{k}}{k^2} \sum_a 4\pi e_a \int \delta N_a(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) d\mathbf{p}. \quad (49.17)$$

Подставим сюда выражение (49.16). В результате получим уравнение для флуктуации поля

$$\epsilon(\omega, \mathbf{k}) \delta E(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{i\mathbf{k}}{k^2} 4\pi \sum_a e_a \int \delta N_a^{\text{нст}}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) d\mathbf{p} \equiv \delta E^{\text{нст}}. \quad (49.18)$$

Здесь введено обозначение для диэлектрической проницаемости плазмы в магнитном поле

$$\epsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 - i \sum_a \frac{4\pi e_a^2 n_a}{k^2} \int_0^\infty \int \exp\{-\Delta\tau + i[\omega\tau + \mathbf{k}(\mathbf{R}(-\tau) - \mathbf{r})]\} \times \\ \times \left( \mathbf{k} \frac{\partial i_a(\mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{p}} \right)_{\mathbf{p}=\mathbf{p}(-\tau)} d\tau d\mathbf{p}. \quad (49.19)$$

Преобразуем это выражение, используя условие (49.6), из которого следует, что  $f_a(\mathbf{P}(-\tau)) = f_a(\mathbf{p})$ . Используем равенство

$$\left( \mathbf{k} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} \right)_{\mathbf{p}=\mathbf{p}(-\tau)} = \frac{\partial i_a(\mathbf{p})}{\partial p_i} k_j \frac{dp_j}{dP_j} = \mathbf{P}(-\tau, \mathbf{k}) \frac{\partial f_a(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}. \quad (49.20)$$

Здесь вектор  $\mathbf{P}(-\tau, \mathbf{k})$  определяется выражением (49.12), если в нем заменить вектор  $\mathbf{p}$  на вектор  $\mathbf{k}$ .

Введем цилиндрическую систему координат  $p^\parallel, p^\perp, \varphi$  с осью  $z$  вдоль вектора  $\mathbf{B}$ . Тогда

$$p_x = p^\perp \cos \varphi, \quad k_x = k^\perp \cos \psi, \\ p_y = p^\perp \sin \varphi, \quad k_y = k^\perp \sin \psi. \quad (49.21)$$

Используя эти равенства, из (49.13) получим

$$\mathbf{kR}(-\tau) = \mathbf{k}\mathbf{r} - k^\parallel v^\parallel \tau - \\ - \frac{k^\perp v^\perp}{\Omega_a} [\sin(\varphi - \psi + \Omega_a \tau) - \sin(\varphi - \psi)], \quad (49.22)$$

$$\mathbf{P}(-\tau, \mathbf{k}) \frac{\partial i_a}{\partial \mathbf{p}} = k^\parallel \frac{\partial i_a}{\partial p^\parallel} + \cos(\varphi - \psi + \Omega_a \tau) k^\perp \frac{\partial i_a}{\partial p^\perp}. \quad (49.23)$$

В последнем равенстве учтено, что функция  $f_a$  не зависит от  $\varphi$ .

Подставим равенства (49.20), (49.22), (49.23) в выражение (49.19) и используем разложение

$$e^{ix \sin(\varphi - \psi)} = \sum_{-\infty}^{\infty} I_n(x) e^{in(\varphi - \psi)}, \quad x = \frac{k^\perp v^\perp}{\Omega_a}. \quad (49.24)$$

Так как функция распределения не зависит от  $\varphi$ , то можно выполнить интегрирование по  $\varphi$ . Используя равенства

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} I_n(x) I_m(x) \exp[-in(\varphi - \psi + \Omega_a \tau) + im(\varphi - \psi)] d\varphi = \sum_m I_m^2(x) \exp(-im\Omega_a \tau), \quad (49.25)$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} I_n(x) I_m(x) \exp[-in(\varphi - \psi + \Omega_a \tau) + im(\varphi - \psi)] \times \\ \times \cos(\varphi - \psi + \Omega_a \tau) d\varphi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-im\Omega_a \tau) \frac{m}{x} I_m^2(x)$$

и выполняя интегрирование по  $\tau$

$$-i \int_0^{\infty} \exp[-\Delta \tau + i(\omega - m\Omega_a - k^{\parallel} v^{\parallel}) \tau] d\tau = \frac{1}{\omega - m\Omega_a - k^{\parallel} v^{\parallel} + i\Delta},$$

получим следующее выражение для диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum_a \frac{4\pi e_a^2 n_a}{k^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} 2\pi p^{\perp} dp^{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dp^{\parallel} I_m^2\left(\frac{k^{\perp} p^{\perp}}{\Omega_a}\right) \times \\ \times \frac{1}{\omega - k^{\parallel} v^{\parallel} - m\Omega_a + i\Delta} \left[ k^{\parallel} \frac{\partial}{\partial p^{\parallel}} + \frac{m\Omega_a}{v^{\perp}} \frac{\partial}{\partial p^{\perp}} \right] f_a(p^{\parallel}, p^{\perp}, t). \quad (49.26)$$

При условии (49.6) выражения (49.19), (49.26) эквивалентны.

Найдем теперь выражение для спектральной плотности флуктуаций поля. Для этого обратимся к уравнению (49.17). Из него следует, что

$$(\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{\sum_{ab} \frac{(4\pi)^2 e_a e_b}{k^2} \int (\delta N_a \delta N_b)_{\omega, \mathbf{k}, p, p'}^{\text{нст}} dp dp'}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} \equiv \frac{(\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}}^{\text{нст}}}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} \quad (49.27)$$

Для определения спектральной плотности флуктуаций  $\delta N_a^{\text{нст}}$  обратимся к уравнению (49.3). Используя снова условие медленности функции  $f_a$ , в нулевом приближении по запаздыванию

получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 (\delta N_a \delta N_b)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'}^{\text{HCT}} &= \\
 &= \delta_{ab} n_a 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} d\tau \exp \{-\Delta\tau + i[\omega\tau + \mathbf{k}(\mathbf{R}(-\tau) - \mathbf{r})]\} \times \\
 &\quad \times \delta(\mathbf{P}(-\tau) - \mathbf{p}') f_a(\mathbf{p}, t). \quad (49.28)
 \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned}
 (\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}}^{\text{HCT}} &= \\
 &= \sum_a \frac{(4\pi)^2 e_a^2 n_a}{k^2} 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \int \exp \{-\Delta\tau + \\
 &\quad + i[\omega\tau + \mathbf{k}(\mathbf{R}(-\tau) - \mathbf{r})]\} f_a(\mathbf{p}, t) d\tau d\mathbf{p}. \quad (49.29)
 \end{aligned}$$

Снова используем равенства (49.22) и разложение (49.24). Интегрируем по  $\varphi$  и используем равенства (49.25). Учитывая, что

$$2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \exp[-\Delta\tau + i(\omega - k^{\parallel} v^{\parallel} - m\Omega_a) \tau] d\tau = 2\pi \delta(\omega - k^{\parallel} v^{\parallel} - m\Omega_a), \quad (49.30)$$

получим искомое выражение

$$\begin{aligned}
 (\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}}^{\text{HCT}} &= \sum_a \frac{(4\pi)^2 e_a^2 n_a}{k^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int 2\pi \delta(\omega - k^{\parallel} v^{\parallel} - m\Omega_a) \times \\
 &\quad \times I_m^2 \left( \frac{k^{\perp} v^{\perp}}{\Omega_a} \right) f_a(p^{\parallel}, p^{\perp}, t) 2\pi p^{\perp} dp^{\perp} dp^{\parallel}. \quad (49.31)
 \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (49.27), найдем спектральную плотность флуктуаций поля.

Найдем теперь выражение для спектральной плотности  $\operatorname{Re}(\delta N \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}}$ , определяющей интеграл столкновений  $I_a$ .

Из равенства (49.16) следует, что

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(\delta N_a(\mathbf{k} \delta E))_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}} &= \operatorname{Re}(\delta N_a^{\text{HCT}}(\mathbf{k} \delta E))_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}} - \\
 &= e_a n_a \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \exp \{-\Delta\tau + i[\omega\tau + \mathbf{k}(\mathbf{R}(-\tau) - \mathbf{r})]\} \times \\
 &\quad \times k_i (\delta E_j \delta E_i)_{\omega, \mathbf{k}} \left( \frac{\partial j_a}{\partial p_j} \right)_{\mathbf{p}=\mathbf{P}(-\tau)} d\tau. \quad (49.32)
 \end{aligned}$$

Преобразуем сначала второй член правой части. Здесь можно произвести усреднение по переменной  $\varphi$ , так как интеграл столкновений в кинетическом уравнении не зависит от нее.

Согласно (49.17)  $\delta \mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$ , поэтому тензор

$$(\delta E_i \delta E_j)_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{k_i k_j}{k^2} (\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}} \quad (49.33)$$

и, следовательно, определяется выражением для спектральной плотности флуктуаций поля.

Преобразуем в (49.32) интеграл по  $\tau$ . Подставим в (49.32) равенства (49.20), (49.22), (49.23) и произведем усреднение по угловой переменной. После этого выполним интегрирование по  $\tau$ . При интегрировании по  $\varphi$ ,  $\tau$  используем выражения (49.25). В результате второй член в (49.32) после усреднения по  $\varphi$  примет вид

$$- \pi^2 n_a n_a \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m^2 \left( \frac{k^\perp v^\perp}{\Omega_a} \right) \delta(\omega - k^\parallel v^\parallel - m\Omega_a) (\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}} \times \\ \times \left( k^\parallel \frac{\partial}{\partial p^\parallel} + \frac{m\Omega_a}{v^\perp} \frac{\partial}{\partial p^\perp} \right) f_a(p^\parallel, p^\perp, t). \quad (49.34)$$

Преобразуем теперь первый член правой части выражения (49.32). Используя уравнение (49.18), запишем его в виде

$$\text{Re} (\delta N_a^{\text{нст}}(\mathbf{k} \delta \mathbf{E}))_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}} = \text{Re} \frac{i}{\varepsilon^*(\omega, \mathbf{k})} \sum_b \int 4\pi e_b \int (\delta N_a \delta N_b)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'}^{\text{нст}} d\mathbf{p}'. \quad (49.35)$$

Подставим сюда выражение (49.28), просуммируем по  $b$  и проинтегрируем по  $\mathbf{p}'$ . Учитывая, что при условии (49.6)  $f_a(\mathbf{p}) = f_a(\mathbf{P}(-\tau))$ , получим

$$\text{Re} (\delta N_a^{\text{нст}}(\mathbf{k} \delta \mathbf{E}))_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}} = \\ = \text{Re} \frac{ie_a n_a}{\varepsilon^*(\omega, \mathbf{k})} 2 \text{Re} \int_0^{\infty} d\tau \exp \{ -\Delta\tau + i[\omega\tau + \mathbf{k}(\mathbf{R}(-\tau) - \mathbf{r})] \} f_a(\mathbf{p}, t). \quad (49.36)$$

Подставим сюда выражение (49.22), произведем разложение по функциям Бесселя, усредним по угловой переменной, используем (49.25) и выполним интегрирование по  $\tau$ . С учетом равенства (49.30) получим следующее выражение:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Re} (\delta N_a^{\text{нст}}(\mathbf{k} \delta \mathbf{E}))_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}} d\varphi = \\ = \frac{8\pi^2 \text{Im} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} \delta(\omega - k^\parallel v^\parallel - m\Omega_a) f_a(p^\parallel, p^\perp, t). \quad (49.37)$$



Из (49.26) находим мнимую часть диэлектрической проницаемости

$$\operatorname{Im} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = - \sum_b \frac{4\pi^2 e_b^2 n_b}{k^2} \int_0^\infty 2\pi p^\perp dp^\perp \int_{-\infty}^\infty dp^\parallel \sum_{m=-\infty}^\infty I_m^2 \left( \frac{k^\perp v^\perp}{\Omega_b} \right) \times \\ \times \delta(\omega - k^\parallel v^\parallel - m\Omega_b) \left[ k^\parallel \frac{\partial}{\partial p^\parallel} + \frac{m\Omega_b}{v^\perp} \frac{\partial}{\partial p^\perp} \right] f_b(p^\parallel, p^\perp, t). \quad (49.38)$$

Выражения (49.32), (49.34), (49.38) и определяют усредненную по  $\varphi$  спектральную плотность  $(\delta N_a \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}, p}$ . Проинтегрируем в этом выражении по  $\omega$ , чтобы найти пространственную спектральную плотность. В результате получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} (\delta N_a (\mathbf{k} \delta \mathbf{E}))_{\mathbf{k}, p} d\varphi = - \frac{e_a n_a}{2} \sum_{m=-\infty}^\infty I_m^2 \left( \frac{k^\perp v^\perp}{\Omega_a} \right) \times \\ \times \left\{ (\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}} \left[ \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right] + \frac{8\pi \operatorname{Im} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} \right\}_{\omega = k^\parallel v^\parallel + m\Omega_a} f_a(p^\parallel, p^\perp, t). \quad (49.39)$$

Здесь для сокращения записи введено обозначение

$$k^\parallel \frac{\partial}{\partial p^\parallel} + \frac{m\Omega_a}{v^\perp} \frac{\partial}{\partial p^\perp} = \left[ \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right]. \quad (49.40)$$

Полученные нами выражения определяют интеграл столкновений.

## § 50. Кинетические уравнения для плазмы при наличии внешнего магнитного поля

Запишем выражение (49.7) для интеграла столкновений в виде

$$I_a = - \int \frac{e_a}{n_a} \frac{1}{(2\pi)^3} \operatorname{Re} \int \frac{\mathbf{k}}{k^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} (\delta N_a (\mathbf{k} \delta \mathbf{E}))_{\mathbf{k}, p, t} d\mathbf{k}. \quad (50.1)$$

Принимая во внимание, что левая часть уравнения не зависит от  $\varphi$ , усредним выражение (50.1) по  $\varphi$ . Чтобы произвести усреднение в явном виде, поступим следующим образом.

Используем, как и в § 49, цилиндрические координаты с осью  $z \parallel \mathbf{B}$ . Обозначим через  $\varphi$  угол между векторами  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{p}$ . Тогда оператор

$$\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} = k^\parallel \frac{\partial}{\partial p^\parallel} + \cos(\varphi - \psi) k^\perp \frac{\partial}{\partial p^\perp} + \sin(\varphi - \psi) \frac{k^\perp}{p^\perp} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (50.2)$$

Представим спектральную плотность, входящую в (50.1), в виде  $\text{Re}(\delta N_a(\mathbf{k} \delta \mathbf{E}))_{\mathbf{k}, \mathbf{p}}$  =

$$= \exp[ix \sin(\varphi - \psi)] \sum_m \exp[-im(\varphi - \psi)] (\delta N_a(\mathbf{k} \delta \mathbf{E}))_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, t}^{(m)},$$

$$x = k^\perp v^\perp / \Omega_a. \quad (50.3)$$

Найдем выражение для функции  $(\delta N_a(\mathbf{k} \delta \mathbf{E}))_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, t}^{(m)}$ . Для этого подставим в (50.3) разложение (49.24) и произведем усреднение по  $\varphi$ . В результате получим выражение

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Re}(\delta N_a(\mathbf{k} \delta \mathbf{E}))_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, t} d\varphi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m\left(\frac{k^\perp v^\perp}{\Omega_a}\right) \text{Re}(\delta N_a(\mathbf{k} \delta \mathbf{E}))_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, t}^{(m)}. \quad (50.4)$$

Сравнивая выражения (50.4), (49.39), найдем

$$\text{Re}(\delta N_a(\mathbf{k} \delta \mathbf{E}))_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, t}^{(m)} = -\pi e_a n_a I_m\left(\frac{k^\perp v^\perp}{\Omega_a}\right) \times$$

$$\times \left[ (\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}} \left[ \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right] + \frac{8\pi \text{Im} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} \right]_{\omega = k^\parallel v^\parallel + m_a \Omega_a} f_a(p^\parallel, p^\perp, t). \quad (50.5)$$

Подставим теперь выражения (50.2), (50.3) в правую часть (50.1) и произведем усреднение по  $\varphi$ . Используя разложение (49.24) и значения интегралов

$$\sum_n I_n(x) \int_0^{2\pi} \exp[in(\varphi - \psi) - im(\varphi - \psi)] \frac{d\varphi}{2\pi} = I_m(x), \quad (50.6)$$

$$\sum_n I_n(x) \int_0^{2\pi} \cos(\varphi - \psi) \exp[in(\varphi - \psi) - im(\varphi - \psi)] \frac{d\varphi}{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2} [I_{m+1}(x) + I_{m-1}(x)] = \frac{m}{x} I_m(x), \quad (50.7)$$

получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_a(p, t) d\varphi =$$

$$= -\frac{e_a}{n_a} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \left[ \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right] I_m\left(\frac{k^\perp v^\perp}{\Omega_a}\right) (\delta N_a(\mathbf{k} \delta \mathbf{E}))_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, t}^{(m)} d\mathbf{k}. \quad (50.8)$$

Подставляя сюда выражение (50.5), найдем искомое выражение для интеграла столкновения при наличии магнитного поля. Запишем его в двух формах.

Первая содержит явно оператор Фоккера — Планка и имеет вид

$$J_a(p^{\parallel}, p^{\perp}, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \left\{ \left[ \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right] D_a^{(m)}(p^{\parallel}, p^{\perp}, t) \left[ \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right] \times \right. \\ \left. \times f_a(p^{\parallel}, p^{\perp}, t) + \left[ \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right] (A_a^{(m)}(p^{\parallel}, p^{\perp}, t) f_a(p^{\parallel}, p^{\perp}, t)) \right\} d\mathbf{k}. \quad (50.9)$$

Коэффициенты  $D_a^{(m)}$ ,  $A_a^{(m)}$  определяются выражениями

$$D_a^{(m)} = \frac{e_a^2}{16\pi^3 k^2} I_m^2 \left( \frac{k^{\perp} v^{\perp}}{\Omega_a} \right) (\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\mathbf{k}^{\parallel} v^{\parallel} + m \Omega_a, \mathbf{k}}, \quad (50.10)$$

$$A_a^{(m)} = \frac{e_a^2}{2\pi^2 k^2} I_m^2 \left( \frac{k^{\perp} v^{\perp}}{\Omega_a} \right) \frac{\text{Im} \varepsilon(k^{\parallel} v^{\parallel} + m \Omega_a, \mathbf{k})}{|\varepsilon(k^{\parallel} v^{\parallel} + m \Omega_a, \mathbf{k})|^2}. \quad (50.11)$$

Как и в § 37, коэффициент диффузии определяется спектральной плотностью флуктуаций поля, а коэффициент систематического трения пропорционален мнимой части диэлектрической проницаемости.

Чтобы получить другую форму записи интеграла столкновений, аналогичную (37.1), используем выражения (49.27), (49.38) для спектральной плотности флуктуаций поля и мнимой части диэлектрической проницаемости. После подстановки этих функций в (50.5) получим для интеграла столкновений следующее выражение:

$$J_a(p^{\parallel}, p^{\perp}, t) = \sum_b n_b \sum_{m, m'=-\infty}^{\infty} \int \left[ \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right]_m Q_{mm'}^{ab} \times \\ \times \left\{ \left[ \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right]_m - \left[ \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} \right]_{m'} \right\} f_a(p^{\parallel}, p^{\perp}, t) f_b(p'^{\parallel}, p'^{\perp}, t) \times \\ \times 2\pi p'^{\perp} dp'^{\perp} dp'^{\parallel} 2\pi k^{\perp} dk^{\perp} dk^{\parallel}. \quad (50.12)$$

Здесь использовано обозначение

$$Q_{mm'}^{ab} = \\ = 2e_a^2 e_b^2 I_m^2 \left( \frac{k^{\perp} v^{\perp}}{\Omega_a} \right) I_{m'}^2 \left( \frac{k^{\perp} v^{\perp}}{\Omega_b} \right) \frac{\delta(k^{\parallel} v^{\parallel} + m \Omega_a - k^{\parallel} v'^{\parallel} - m' \Omega_b)}{k^4 |\varepsilon(k^{\parallel} v^{\parallel} + m \Omega_a)|^2}. \quad (50.13)$$

Кинетическое уравнение для плазмы в магнитном поле с учетом процессов поляризации рассматривалось в работах Ростокера [36], Елеонского, Зырянова, Силина [37], в работах [38, 8]. В более ранних работах Беляева [39] исследовались кинетические

уравнения для плазмы в магнитном поле без учета процессов динамической поляризации, т. е. рассматривалось приближение, аналогичное приближению Ландау (§ 38).

В приближении Ландау в интеграле столкновений возникает логарифмическая расходимость при интегрировании по волновым числам. Вследствие этого приходится накладывать ограничения (38.2) на область интегрирования. Ограничение со стороны малых  $k$  соответствует приближенному учету поляризации плазмы.

При наличии сильного магнитного поля, когда частота и радиус Лармора  $\Omega_L$ ,  $R_L$  таковы, что

$$\Omega_L > \omega_L, \quad R_L < r_D, \quad (50.14)$$

учет поляризации не является необходимым, так как в этом случае расходимость при малых значениях волновых чисел исчезает. При этом эффективное значение  $k_{\min} \sim 1/R_L < 1/r_D$ .

Таким образом, учет поляризации плазмы в интеграле столкновений существен, когда

$$\Omega_L < \omega_L, \quad R_L > r_D. \quad (50.15)$$

Выражения (50.9), (50.12) для интеграла столкновений очень сложны. Они существенно упрощаются, если использовать эффективный потенциал (§ 47), учитывающий усредненный вклад динамической поляризации.

Заметим, что в приближении Ландау можно не вводить ограничение (49.6) на вид функции распределения  $f_a$ , т. е. учесть вклад и быстрых изменений функции распределения  $f_a$ . Представляет несомненный интерес построение кинетических уравнений для плазмы в магнитном поле с учетом динамической поляризации и без ограничения (49.6).

Изложенные в этой главе методы могут быть перенесены и на квантовые системы. Здесь нет, к сожалению, возможности привести соответствующие результаты. Отметим лишь, что существенный вклад в исследование процессов в сильных магнитных полях внес Павел Степанович Зырянов, трагически погибший зимой 1974 года.

## ПРОСТРАНСТВЕННО ОДНОРОДНАЯ НЕИДЕАЛЬНАЯ ПЛАЗМА

### § 51. Спектральные плотности нестационарных процессов

При расчете спектральных плотностей, определяющих интегралы столкновений в неидеальной плазме, необходимо, как и в газах, учитывать временное запаздывание функций распределения. Иными словами, нельзя пренебрегать изменениями функций распределения за времена корреляций флуктуаций, определяющих кинетические процессы. Вследствие этого флуктуационный процесс оказывается нестационарным и возникает поэтому необходимость расчета спектральных плотностей нестационарных процессов.

Рассмотрим примеры.

Пусть процесс характеризуется случайными функциями времени

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), \quad (51.1)$$

для которых средние значения равны нулю, а одновременные вторые моменты являются заданными функциями времени. При стационарном процессе они от времени не зависят.

Обозначим через

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}(t, t - \tau) &\equiv \varphi_{ij}(t, \tau) = \overline{x_i(t) x_j(t - \tau)}, \\ \varphi_{ji}(t, t - \tau) &\equiv \varphi_{ji}(t, \tau) = \overline{x_j(t) x_i(t - \tau)} \end{aligned} \quad (51.2)$$

корреляции случайных функций  $x_i, x_j$ ;  $x_j, x_i$  в моменты времени  $t, t - \tau$ . Для стационарного процесса функции  $\varphi_{ij}$  не зависят от  $t$  и определяются равенствами [45]

$$\overline{x_i(t) x_j(t - \tau)} = \overline{x_i(t + \tau) x_j(t)}, \quad (51.3)$$

выражающими тот факт, что корреляции не изменяются при замене  $t \rightarrow t + \tau$ . Из (51.3), (51.2) для стационарного процесса следует равенство

$$\varphi_{ij}(\tau) = \varphi_{ji}(-\tau). \quad (51.4)$$

В линейном приближении функции  $\varphi_{ij}(t, t - \tau)$ ,  $\varphi_{ji}(t, t - \tau)$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi_{ij}(t, t - \tau) + \lambda_{ik} \varphi_{kj}(t, t - \tau) &= 0, \quad (\tau > 0), \\ \frac{d}{dt} \varphi_{ji}(t, t - \tau) + \lambda_{jk} \varphi_{ki}(t, t - \tau) &= 0, \quad (\tau > 0), \end{aligned} \quad (51.5)$$

которые следует решать при начальных условиях

$$\varphi_{ij}(t, t - \tau) \Big|_{t=t-\tau} = \overline{(x_i x_j)}_{t=t-\tau}, \quad \varphi_{ji}(t, t - \tau) \Big|_{t=t-\tau} = \overline{(x_j x_i)}_{t=t-\tau}. \quad (51.6)$$

Для нестационарного процесса спектральную плотность определим следующим образом:

$$(x_i x_j)_{\omega, t} = \int_0^{\infty} [\overline{(x_i x_j)}_{t, t-\tau} e^{i\omega\tau} + \overline{(x_j x_i)}_{t, t-\tau} e^{-i\omega\tau}] d\tau. \quad (51.7)$$

Отсюда следует, что

$$(x_i x_j)_{\omega, t} = [(x_i x_j)_{\omega, t}]_{i \neq j}^*. \quad (51.8)$$

Таким образом, спектральная плотность нестационарного процесса определяется односторонними преобразованиями Фурье по  $\tau$  от корреляций  $\varphi_{ij}(t, t - \tau)$ ,  $\varphi_{ji}(t, t - \tau)$ .

Для стационарного процесса из (51.7) с учетом равенства (51.3) и замены во втором интеграле  $\tau \rightarrow -\tau$  получим обычное определение

$$(x_i x_j)_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{(x_i x_j)}_{t, t-\tau} e^{i\omega\tau} d\tau \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{ij}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (51.9)$$

Разложение Фурье для корреляций имеет вид

$$\begin{aligned} \overline{(x_i x_j)}_{t, t-\tau} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i x_j)_{\omega, t} e^{-i\omega\tau} d\omega, \\ \overline{(x_j x_i)}_{t, t-\tau} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (x_j x_i)_{\omega, t}^* e^{i\omega\tau} d\omega. \end{aligned} \quad (51.10)$$

Из условия вещественности корреляций

$$(x_i x_j)_{\omega, t}^* = (x_i x_j)_{-\omega, t}, \quad (x_j x_i)_{\omega, t}^* = (x_j x_i)_{-\omega, t}. \quad (51.11)$$

Рассмотрим для примера случай одной переменной. В этом случае вместо двух функций (51.2) останется одна

$$\varphi(t, t - \tau) \equiv \varphi(t, \tau) = \overline{(x x)}_{t, t-\tau}. \quad (51.12)$$

Она определяется уравнением

$$\frac{d}{dt} \varphi(t, t - \tau) + \lambda \varphi(t, t - \tau) = 0, \quad \varphi(t, t - \tau)|_{t=t-\tau} = \overline{(x^2)}_{t-\tau}. \quad (51.13)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi(t, t - \tau) = e^{-\lambda \tau} \overline{(x^2)}_{t-\tau}, \quad (\tau \geq 0), \quad (51.14)$$

и из (51.7)

$$(x^2)_{\omega, t} = 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} (xx)_{t, t-\tau} e^{i\omega \tau} d\tau. \quad (51.15)$$

Подставляя (51.14) в (51.15), получим спектральную плотность нестационарного процесса

$$(x^2)_{\omega, t} = 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-\lambda \tau + i\omega \tau} \overline{(x^2)}_{t-\tau} d\tau. \quad (51.16)$$

При стационарном процессе это выражение принимает вид

$$(x^2)_{\omega} = \frac{2\lambda \overline{(x^2)}}{\omega^2 + \lambda^2}. \quad (51.17)$$

Выражение (51.16) для спектральной плотности нестационарного процесса можно представить в виде

$$(x^2)_{\omega, t} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda |\tau|} \overline{(x^2)}_{t-|\tau|} e^{i\omega \tau} d\tau. \quad (51.18)$$

Оба определения (51.16), (51.18) удовлетворяют, естественно, условию

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2)_{\omega, t} d\omega = \overline{(x^2)}_t. \quad (51.19)$$

Заметим, что и общее выражение (51.15) можно представить в виде, аналогичном (51.18):

$$(x^2)_{\omega, t} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{(xx)}_{t, t-|\tau|} e^{i\omega \tau} d\tau \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \overline{(xx)}_{t, |\tau|} e^{i\omega \tau} d\tau. \quad (51.20)$$

Соответствующее обратное преобразование имеет вид

$$\overline{(xx)}_{t, t-|\tau|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2)_{\omega, t} e^{-i\omega |\tau|} d\omega. \quad (51.21)$$

Рассмотрим теперь соответствующее уравнение Ланжевена. В случае одной переменной оно имеет вид

$$dx/dt + \lambda x = \xi(t), \quad (51.22)$$

где  $\xi$  — случайный источник:

$$\bar{\xi} = 0, \quad (\overline{\xi\xi})_{t,t'} = B(t) \delta(t - t'). \quad (51.23)$$

Установим связь интенсивности флуктуаций источника  $B$  с  $(x^2)_t$  для нестационарного процесса. Для этого используем решение уравнения Ланжевена

$$x(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-t')} \xi(t') dt'. \quad (51.24)$$

Отсюда с учетом (51.23) находим

$$(\overline{x^2})_t = \int_0^{\infty} e^{-2\lambda\tau} B(t - \tau) d\tau. \quad (51.25)$$

Мы видим, что связь  $(x^2)_t$  с  $B$  для нестационарного процесса включает эффект запаздывания.

От (51.25) можно перейти к дифференциальному соотношению

$$d(\overline{x^2})_t/dt + 2\lambda(\overline{x^2})_t = B(t). \quad (51.26)$$

В стационарном случае оба выражения (51.25), (51.26) приводят к известному результату:

$$B = 2\lambda\overline{x^2}. \quad (51.27)$$

Установим соответствующую связь для спектральных плотностей  $(x^2)_{\omega,t}$ ,  $(\xi^2)_{\omega,t}$ . Подставим для этого выражение (51.25) в правую часть равенства (51.16) и проведем интегрирование по частям. В результате получим уравнение для спектральной плотности

$$\frac{d(x^2)_{\omega,t}}{dt} + 2\lambda(x^2)_{\omega,t} = 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau + i\omega\tau} B(t - \tau) d\tau. \quad (51.28)$$

Если здесь выполнить интегрирование по  $\omega$  и учесть равенство (51.19), то получим уравнение (51.26).

Для стационарного процесса из уравнения (51.28) следует равенство [45]

$$(x^2)_{\omega} = B/(\omega^2 + \lambda^2). \quad (51.29)$$

С учетом (51.27) оно совпадает с (51.17).



Из определения (51.23) следует, что для стационарного процесса

$$\overline{(\xi\xi)_\tau} = B\delta(\tau), \quad (\xi\xi)_\omega = B, \quad (51.30)$$

поэтому выражение (51.29) для спектральной плотности можно записать в виде

$$(x^2)_\omega = (\xi^2)_\omega / (\omega^2 + \lambda^2). \quad (51.31)$$

Это равенство определяет связь спектральных плотностей  $(x^2)_\omega$ ,  $(\xi^2)_\omega$  при стационарном процессе.

Для нестационарного процесса спектральная плотность источника определяется выражением

$$2\lambda (x^2)_{\omega, t}^{\text{нст}} = 2 \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-\lambda\tau + i\omega\tau} B(t - \tau) d\tau. \quad (51.32)$$

С учетом этого уравнение (51.28) для спектральной плотности можно представить в виде

$$\frac{d(x^2)_{\omega, t}}{dt} = -2\lambda [(x^2)_{\omega, t} - (x^2)_{\omega, t}^{\text{нст}}]. \quad (51.33)$$

Для стационарного процесса отсюда следует равенство (51.29).

Полезна еще одна форма записи уравнения для спектральной плотности.

Из уравнения Ланжевена (51.22) находим

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt} x\right)_{t, t-\tau} &= -\lambda (\overline{xx})_{t, t-\tau} + (\overline{\xi x})_{t, t-\tau}, \\ \left(x \frac{dx}{dt}\right)_{t, t-\tau} &= -\lambda (\overline{xx})_{t, t-\tau} + (\overline{x\xi})_{t, t-\tau}. \end{aligned} \quad (51.34)$$

Используя эти равенства и формулу (51.7), найдем

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt} x\right)_{\omega, t} &= -\lambda (x^2)_{\omega, t} + (\xi x)_{\omega, t}, \\ \left(x \frac{dx}{dt}\right)_{\omega, t} &= -\lambda (x^2)_{\omega, t} + (x\xi)_{\omega, t}. \end{aligned} \quad (51.35)$$

Складывая эти равенства, получим уравнение

$$\frac{d(x^2)_{\omega, t}}{dt} + 2\lambda (x^2)_{\omega, t} = (\xi x)_{\omega, t} + (x\xi)_{\omega, t} = 2 \operatorname{Re} (x\xi)_{\omega, t}. \quad (51.36)$$

По общей формуле (51.7) имеем

$$(x\xi)_{\omega, t} = \int_0^\infty [(\overline{x\xi})_{t, t-\tau} e^{i\omega\tau} + (\overline{\xi x})_{t, t-\tau} e^{-i\omega\tau}] d\tau. \quad (51.37)$$

Таким образом, для определения спектральной плотности надо знать две функции  $(\overline{x\xi})_{t, t-\tau}$ ,  $(\overline{\xi x})_{t, t-\tau}$ . Для их определения используем решение уравнения Ланжевена (51.24) и равенство (51.23). Тогда

$$(\overline{x\xi})_{t, t-\tau} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau'} (\overline{\xi\xi})_{t-\tau', t-\tau} d\tau' = e^{-\lambda\tau} B(t-\tau), \quad (51.38)$$

$$\begin{aligned} (\overline{\xi x})_{t, t-\tau} &= \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau'} (\overline{\xi\xi})_{t, t-\tau-\tau'} d\tau' = \int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau'} B(t) \delta(\tau + \tau') d\tau' = 0. \end{aligned} \quad (51.39)$$

Из (51.37) — (51.39) следует, что

$$2 \operatorname{Re} (x\xi)_{\omega, t} = 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau + i\omega\tau} B(t-\tau) d\tau. \quad (51.40)$$

Подставляя это выражение в правую часть (51.36), снова приходим к уравнению (51.28).

## § 52. Спектральные плотности флуктуаций источников в неидеальной плазме

В соответствии с определением (51.7) спектральная плотность флуктуаций  $\delta N_a$ ,  $\delta N_b$  для неидеальной и пространственно неоднородной плазмы выражается через корреляции следующим образом:

$$\begin{aligned} (\delta N_a \delta N_b)_{\omega, k, t, r, p, p'} &= \iint_0^{\infty} [(\overline{\delta N_a \delta N_b})_{t, t-\tau, r, r-r', p, p'} e^{i(\omega\tau - k(r-r'))} + \\ &+ (\overline{\delta N_b \delta N_a})_{t, t-\tau, r, r-r', p', p} e^{-i(\omega\tau - k(r-r'))}] d\tau d(r-r'). \end{aligned} \quad (52.1)$$

Отсюда следует свойство спектральной плотности

$$(\delta N_a \delta N_b)_{\omega, k, t, r, p, p'} = [(\delta N_a \delta N_b)_{\omega, k, t, r, p, p'}]_{a \neq b, p \neq p'}^* \quad (52.2)$$

Удобна другая форма определения (52.1). Введем обозначение

$$\begin{aligned} (\delta N_a \delta N_b)_{\omega, k, t, r, p, p'}^+ &= \\ &= \iint_0^{\infty} (\overline{\delta N_a \delta N_b})_{t, t-\tau, r, r-r', p, p'} e^{i(\omega\tau - k(r-r'))} d\tau d(r-r'). \end{aligned} \quad (52.3)$$

Из (52.1), (52.3) следует, что

$$(\delta V_a \delta N_b)_{\omega, k, t, r, p, p'} = (\delta N_a \delta N_b)_{\omega, k, t, r, p, p'}^+ + [(\delta N_a \delta N_b)_{\omega, k, t, r, p, p'}^+]_{a \gtrsim b, p \gtrsim p'}^* \quad (52.4)$$

Для стационарного и однородного процесса выполняется условие

$$\overline{(\delta N_a \delta N_b)_{t, t-\tau, r, r-r', p, p'}} = \overline{(\delta N_a \delta N_b)_{t+\tau, t, r+r', r, p, p'}} \quad (52.5)$$

аналогичное условию (51.3). Выражение (52.1) для этого случая можно записать в виде

$$\begin{aligned} (\delta V_a \delta N_b)_{\omega, k, p, p'} &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int d(r-r') \overline{(\delta N_a \delta N_b)_{t, t-\tau, r, r-r', p, p'}} e^{i(\omega\tau - k(r-r'))} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau (\delta N_a \delta N_b)_{t, t-\tau, k, p, p'} e^{i\omega\tau}. \end{aligned} \quad (52.6)$$

В этой главе мы рассмотрим кинетические уравнения для неидеальной, но пространственно однородной плазмы. В этом случае флуктуационный процесс является однородным, но нестационарным, поэтому спектральная плотность определяется выражением

$$\begin{aligned} (\delta N_a \delta N_b)_{\omega, k, t, p, p'} &= \\ &= \int_0^{\infty} [(\delta N_a \delta N_b)_{t, t-\tau, k, p, p'} e^{i\omega\tau} + (\delta N_b \delta N_a)_{t, t-\tau, -k, p', p} e^{-i\omega\tau}] d\tau = \\ &= (\delta N_a \delta N_b)_{\omega, k, t, p, p'}^+ + [(\delta N_a \delta N_b)_{\omega, k, t, p, p'}^+]_{a \gtrsim b, p \gtrsim p'}^* \end{aligned} \quad (52.7)$$

Используем это определение для нахождения спектральной плотности флуктуаций источника.

Из уравнения (34.1) с начальным условием (33.11) следуют уравнения для пространственной спектральной плотности флуктуаций  $\delta N_a^{\text{ист}}$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + ikv + \Delta \right) (\delta N_a \delta N_b)_{t, t-\tau, k, p, p'}^{\text{ист}} &= 0 \quad (\tau > 0), \\ (\delta N_a \delta N_b)_{t, t-\tau, k, p, p'}^{\text{ист}} \Big|_{t=t-\tau} &= n_a \delta_{ab} \delta(p-p') f_a(p, t-\tau). \end{aligned} \quad (52.8)$$

Решение уравнения (52.8) имеет вид

$$(\delta N_a \delta N_b)_{t, t-\tau, k, p, p'}^{\text{ист}} = n_a \delta_{ab} \delta(p-p') e^{-\Delta\tau - ikv\tau} f_a(p, t-\tau) \quad (52.9)$$

Таким же образом находим решение для входящей в выражение (52.7) функции  $(\delta N_b \delta N_a)_{t, t-\tau, -k, p, p'}$

$$(\delta N_b \delta N_a)_{t, t-\tau, -k, p, p'}^{\text{нст}} = n_a \delta_{ab} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') e^{-\Delta\tau + ikv\tau} f_a(\mathbf{p}, t - \tau). \quad (52.10)$$

Подставляя эти решения в выражение (52.7), найдем спектральную плотность [7]

$$\begin{aligned} (\delta N_a \delta N_b)_{\omega, k, t, p, p'}^{\text{нст}} &= \\ &= n_a \delta_{ab} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-\Delta\tau + i(\omega - kv)\tau} f_a(\mathbf{p}, t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (52.11)$$

Из этого выражения в нулевом приближении по запаздыванию (для идеальной плазмы) следует выражение (34.11).

Используя выражение (52.11), можно найти более простые спектральные плотности, например [7],

$$\begin{aligned} (\delta N_a \delta E)_{\omega, k, t, p}^{\text{нст}} &= \frac{ik}{k^2} 4\pi e_a n_a 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-\Delta\tau + i(\omega - kv)\tau} f_a(\mathbf{p}, t - \tau) d\tau, \\ (\delta j \delta E)_{\omega, k, t}^{\text{нст}} &= \\ &= i4\pi \sum_a \frac{\hat{e}_a n_a}{k^2} 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} d\tau \int d\mathbf{p} k v e^{-\Delta\tau + i(\omega - kv)\tau} f_a(\mathbf{p}, t - \tau), \end{aligned} \quad (52.12)$$

$$(\delta E \delta E)_{\omega, k, t}^{\text{нст}} = \sum_a \frac{(4\pi)^2 \hat{e}_a^2 n_a}{k^2} 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} d\tau \int d\mathbf{p} e^{-\Delta\tau + i(\omega - kv)\tau} f_a(\mathbf{p}, t - \tau).$$

Производя в (52.11), (52.12) интегрирование по  $\omega$ , найдем выражения для соответствующих пространственных спектральных плотностей. Например, из (52.11) следует

$$(\delta N_a \delta N_b)_{k, t, p, p'}^{\text{нст}} = n_a \delta_{ab} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') f_a(\mathbf{p}, t). \quad (52.13)$$

Здесь при интегрировании по  $\omega$  учтено, что интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} e^{i\omega\tau} f(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2} f(t). \quad (52.14)$$

Рассмотрим вместо уравнения (52.8) соответствующее уравнение Ланжевена для  $\delta N_a^{\text{нст}}$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + ikv + \Delta \right) \delta N_a^{\text{нст}} = y_a(\mathbf{p}, \mathbf{k}, t). \quad (52.15)$$

Здесь  $y_a$  — дельта-коррелированный источник. Среднее значение его равно нулю, а корреляция

$$(y_a y_b)_{t', t'', k, p, p'} = B_{ab}(p, p', t') \delta(t' - t''), \quad (52.16)$$

где  $B_{ab}$  — интенсивность флуктуаций  $y_a, y_b$ .

Установим связь интенсивности с функцией (52.13). Для этого используем решение уравнения (52.15)

$$\delta N_a^{\text{нст}}(k, p, t) = \int_{-\infty}^t e^{-\Delta(t-t') - i k v(t-t')} y_a(k, p, t') dt'. \quad (52.17)$$

Используя соответствующее решение для  $y_b$  и выражение (52.16), найдем искомую связь:

$$(\delta N_a \delta N_b)_{k, p, t, p'}^{\text{нст}} = \int_0^{\infty} e^{-2\Delta\tau - i(kv - kv')\tau} B_{ab}(p, p', t - \tau) d\tau. \quad (52.18)$$

Сравнивая выражения (52.13), (52.18), видим, что функция  $B_{ab}$  имеет структуру

$$B_{ab}(p, p', t) = \delta_{ab} \delta(p - p') n_a B_a(p, t). \quad (52.19)$$

С учетом этого из (52.18) следует, что

$$(\delta N_a \delta N_b)_{k, p, p', t}^{\text{нст}} = \int_0^{\infty} e^{-2\Delta\tau} B_{ab}(p, p', t - \tau) d\tau.$$

Отсюда находим соответствующее дифференциальное соотношение:

$$\frac{d}{dt} (\delta N_a \delta N_b)_{k, t, p, p'}^{\text{нст}} + 2\Delta (\delta N_a \delta N_b)_{k, t, p, p'}^{\text{нст}} = B_{ab}(p, p', t). \quad (52.20)$$

Подставляя в (52.20) выражения (52.13), (52.19), получим связь функций  $B_a$  с  $f_a$ :

$$df_a/dt + 2\Delta f_a = B_a(t, p), \quad (52.21)$$

Отсюда следует, что в стационарном состоянии

$$B_a(p) = 2\Delta f_a(p) \quad (52.22)$$

и, следовательно,

$$B_{ab}(p, p', t) = 2\Delta (\delta N_a \delta N_b)_{k, t, p, p'}^{\text{нст}} \quad (52.23)$$

Найдем, наконец, связь функции  $B_{ab}$  с пространственно-временной спектральной плотностью (52.11). Для этого исключим из выражения (52.11) функцию  $f_a$  с помощью соотношения

(52.21). В результате получим уравнение

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} + 2\Delta\right) (\delta N_a \delta N_b)_{\omega, \mathbf{k}, t, \mathbf{p}, \mathbf{p}'}^{\text{нст}} = \\ = 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-\Delta\tau + i(\omega - k v)\tau} B_{ab}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (52.24)$$

Заметим, что уравнения (52.21), (52.24) соответствуют уравнениям (51.26), (51.28).

Используя уравнения (52.21), (52.24), можно получить соответствующие уравнения для любых спектральных плотностей флуктуаций  $\delta N_a$ ,  $\delta E$ ,  $\delta j$ . Например, уравнения для спектральных плотностей флуктуаций поля имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta E \delta E)_{\mathbf{k}, t}^{\text{нст}} + 2\Delta (\delta E \delta E)_{\mathbf{k}, t}^{\text{нст}} = \sum_a \frac{(4\pi)^2}{k^2} \zeta_a n_a \int B_a(\mathbf{p}, t) d\mathbf{p}, \quad (52.25)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\Delta\right) (\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, t}^{\text{нст}} = \\ = \sum_a \frac{(4\pi)^2 e_a^2 n_a}{k^2} \iint_0^{\infty} e^{-\Delta\tau + i(\omega - k v)\tau} B_a(\mathbf{p}, t - \tau) d\tau d\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (52.26)$$

В стационарном случае из (52.26) (с учетом равенства (52.22)) получается выражение (34.14).

### § 53. Кинетическое уравнение Ландау для неидеальной плазмы

Интеграл столкновений может быть выражен через пространственную спектральную плотность флуктуаций  $\delta N_a$ ,  $\delta E$ . Для пространственно однородной плазмы это выражение принимает вид

$$I_a(\mathbf{p}, t) = -\frac{e_a}{n_a} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \int \operatorname{Re} (N_a \delta E)_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, t} d\mathbf{k}, \quad (53.1)$$

Уравнения для флуктуаций  $\delta N_a$ ,  $\delta E$  следуют из (33.6):

$$\begin{aligned} \delta N_a(\mathbf{k}, \mathbf{p}, t) = \delta N_a^{\text{нст}}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, t) - \\ - e_a n_a \int_0^{\infty} e^{-\Delta\tau - i k v \tau} \delta E(\mathbf{k}, t - \tau) \frac{\partial f_a(\mathbf{p}, t - \tau)}{\partial \mathbf{p}} d\tau, \end{aligned} \quad (53.2)$$

$$\delta E(\mathbf{k}, t) = -\frac{i\mathbf{k}}{k^2} \sum_a 4\pi e_a \int \delta l_a(\mathbf{k}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}. \quad (53.3)$$

Подставляя  $\delta N_a$  из (53.2) в (53.3), получим интегральное уравнение для  $\delta E$ :

$\delta E(\mathbf{k}, t)$  —

$$\begin{aligned} & -\frac{i}{k^2} \sum_a 4\pi e_a^2 n_a \iint_0^\infty e^{-\Delta\tau - ikv\tau} \mathbf{k} \frac{\partial f_a(\mathbf{p}, t - \tau)}{\partial \mathbf{p}} \delta E(\mathbf{k}, t - \tau) d\tau d\mathbf{p} = \\ & = -\frac{i\mathbf{k}}{k^2} \sum_a 4\pi e_a \int \delta N_a^{\text{нст}}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p} \equiv \delta E^{\text{нст}}(\mathbf{k}, t). \end{aligned} \quad (53.4)$$

Используем для решения этого уравнения теорию возмущений. В нулевом приближении

$$\delta E^{(0)} = \delta E^{\text{нст}}. \quad (53.5)$$

В первом приближении

$$\delta E^{(1)} = \frac{i}{k^2} \sum_a 4\pi e_a^2 n_a \iint_0^\infty e^{-\Delta\tau - ikv\tau} \mathbf{k} \frac{\partial f_a(\mathbf{p}, t - \tau)}{\partial \mathbf{p}} \delta E^{\text{нст}}(\mathbf{k}, t - \tau) d\tau d\mathbf{p}. \quad (53.6)$$

Представим спектральную плотность в (53.1) в виде суммы двух частей:

$$(\delta N_a \delta E)_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, t} = (\delta N_a \delta E)_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, t}^{\text{ннд}} + (\delta N_a^{\text{нст}} \delta E)_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, t}. \quad (53.7)$$

Из уравнения (53.2) следует, что

$$\begin{aligned} & (\delta N_a \delta E)_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, t}^{\text{ннд}} = \\ & = -\mathbf{k} \frac{e_a n_a}{k^2} \int_0^\infty e^{-\Delta\tau - ikv\tau} (\delta E \delta E)_{\mathbf{k}, t, t-\tau}^* \mathbf{k} \frac{\partial f_a(\mathbf{p}, t - \tau)}{\partial \mathbf{p}} d\tau. \end{aligned} \quad (53.8)$$

Это выражение пропорционально спектральной плотности флуктуаций поля и поэтому определяет индуцированный вклад в (53.7).

В первом приближении теории возмущений в (53.8)

$$(\delta E \delta E)_{\mathbf{k}, t, t-\tau}^* = (\delta E \delta E)_{\mathbf{k}, t, t-\tau}^{\text{нст}*}. \quad (53.9)$$

Спектральную плотность флуктуаций  $\delta E^{\text{нст}}$  находим с помощью выражения (52.9):

$$(\delta E \delta E)_{\mathbf{k}, t, t-\tau}^{\text{нст}*} = \sum_{\mathbf{k}'} \frac{(4\pi)^2 e_b^2 n_b}{k^2} \int e^{-\Delta\tau + ikv'\tau} f_b(\mathbf{p}', t - \tau) d\mathbf{p}'. \quad (53.10)$$

Из (53.8) — (53.10) находим

$$e_a (\delta N_a \delta E)_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, t}^{\text{ннд}} = - \sum_b (4\pi)^2 e_a^2 e_b^2 n_a n_b \frac{k_i k_j}{k^4} \times \\ \times \int_0^\infty \int e^{-2\Delta\tau - i(k\mathbf{v} - k\mathbf{v}')\tau} \frac{\partial f_a(\mathbf{p}, t - \tau)}{\partial p_j} f_b(\mathbf{p}', t - \tau) d\tau d\mathbf{p}'. \quad (53.11)$$

Рассмотрим второй член в (53.7). В нулевом приближении с учетом (53.5), (52.9) находим

$$(\delta N_a^{\text{нст}} \delta \mathbf{E})_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, t}^{(0)} = \frac{i\mathbf{k}}{k^2} 4\pi e_a n_a f_a(\mathbf{p}, t). \quad (53.12)$$

Это выражение не дает вклада в интеграл столкновений, так как реальная часть его равна нулю.

В первом приближении, используя (53.6), получаем

$$(\delta N_a^{\text{нст}} \delta \mathbf{E})_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, t}^{(1)} = - \frac{i}{k^2} \sum_b 4\pi e_b^2 n_b \int_0^\infty \int e^{-\Delta\tau + i\mathbf{k}\mathbf{v}'\tau} \times \\ \times \mathbf{k} \frac{df_b(\mathbf{p}', t - \tau)}{dp'} (\delta N_a \delta \mathbf{E})_{\mathbf{k}, t, t - \tau, \mathbf{p}}^{\text{нст}} d\tau d\mathbf{p}'. \quad (53.13)$$

Используя (52.9), находим

$$(\delta N_a \delta \mathbf{E})_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, t, t - \tau}^{\text{нст}} = \frac{i\mathbf{k}}{k^2} 4\pi e_a n_a e^{-\Delta\tau - i\mathbf{k}\mathbf{v}\tau} f_a(\mathbf{p}, t - \tau). \quad (53.14)$$

Подставим это выражение в (53.13). В результате

$$e_a (\delta N_a^{\text{нст}} \delta \mathbf{E})_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, t}^{(1)} = \sum_b (4\pi)^2 e_a^2 e_b^2 n_a n_b \frac{\mathbf{k}}{k^2} \int_0^\infty \int e^{-\Delta\tau - i(k\mathbf{v} - k\mathbf{v}')\tau} \times \\ \times \mathbf{k} \frac{df_b(\mathbf{p}', t - \tau)}{dp'} f_a(\mathbf{p}, t - \tau) d\tau d\mathbf{p}'. \quad (53.15)$$

Подставляя теперь (53.11), (53.15) в (53.1), находим интеграл столкновений [40,7]

$$I_a(\mathbf{p}, t) = \sum_b \frac{2}{\pi} e_a^2 e_b^2 n_b \frac{\partial}{\partial p_i} \text{Re} \int_0^\infty \int \frac{k_i k_j}{k^4} e^{-2\Delta\tau - i(k\mathbf{v} - k\mathbf{v}')\tau} \times \\ \times \left( \frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{\partial}{\partial p'_j} \right) f_a(\mathbf{p}, t - \tau) f_b(\mathbf{p}', t - \tau) d\tau d\mathbf{p}' d\mathbf{k}. \quad (53.16)$$

Если в этом выражении пренебречь временным запаздыванием и выполнить интегрирование по  $\tau$ , то оно совпадет с инте-



гравом столкновений Ландау (38.3), (38.4). Как и в (38.4), интегрирование по  $\mathbf{k}$  в (53.16) производится по области (38.2).

Таким образом, выражение (53.16) отличается от интеграла столкновений Ландау лишь учетом временного запаздывания. Мы увидим, что это соответствует учету неидеальности плазмы, поэтому выражение (53.16) можно назвать интегралом столкновений для неидеальной плазмы.

Легко проверить, что интеграл столкновений (53.16) обладает свойствами

$$I(t) = \sum_a n_a \int \varphi_a(\mathbf{p}) I_a(\mathbf{p}, t) d\mathbf{p} = 0 \quad \text{при } \varphi = 1, \mathbf{p}, \quad (53.17)$$

обеспечивающими выполнение законов сохранения числа частиц и импульса плазмы.

В отличие от (37.10) равенство  $I(t) = 0$  не имеет места при  $\varphi_a = \mathbf{p}^2/2m_a$ . Действительно, из (53.16) следует

$$\begin{aligned} \sum_a n_a \int \frac{\mathbf{p}^2}{2m_a} I_a d\mathbf{p} = & - \sum_{ab} \frac{e_a^2 e_b^2 n_a n_b}{\pi} \iint_0^\infty e^{-2\Delta\tau} \sin(\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}') \tau \times \\ & \times \frac{\mathbf{k}}{k^i} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} \right) \frac{\partial}{\partial t} f_a(\mathbf{p}, t - \tau) f_b(\mathbf{p}', t - \tau) d\mathbf{k} d\mathbf{p} d\mathbf{p}' d\tau. \end{aligned} \quad (53.18)$$

Покажем, что это выражение в первом приближении по запаздыванию можно представить в виде

$$\sum_a n_a \int \frac{\mathbf{p}^2}{2m_a} I_a d\mathbf{p} = - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{(\delta\mathbf{E} \delta\mathbf{E})_{\mathbf{k}, t}}{8\pi} d\mathbf{k} = - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{\delta\mathbf{E} \delta\mathbf{E}}}{8\pi}. \quad (53.19)$$

Из (53.5), (53.6) в первом приближении следует, что

$$\begin{aligned} (\delta\mathbf{E} \delta\mathbf{E})_{\mathbf{k}, t} = & (\delta\mathbf{E} \delta\mathbf{E})_{\mathbf{k}, t}^{\text{нст}} + (\delta\mathbf{E}^{(1)} \delta\mathbf{E}^{(0)})_{\mathbf{k}, t} + (\delta\mathbf{E}^{(0)} \delta\mathbf{E}^{(1)})_{\mathbf{k}, t} = \\ = & \sum_a \frac{(4\pi)^2 e_a^2 n_a}{k^2} \int f_a(\mathbf{p}, t) d\mathbf{p} + \sum_{ab} \frac{(4\pi)^3 e_a^2 e_b^2 n_a n_b}{k^i} \times \\ & \times 2 \operatorname{Re} \iint_0^\infty \sin[(\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}') \tau] f_a(\mathbf{p}, t - \tau) \mathbf{k} \frac{\partial f_b(\mathbf{p}', t - \tau)}{\partial \mathbf{p}'} d\tau d\mathbf{p} d\mathbf{p}'. \end{aligned} \quad (53.20)$$

Первый член в этом выражении не зависит от времени и учитывает вклад самовоздействия в спектральную плотность флуктуаций поля. Второй член при подстановке в правую часть (53.19) и симметризации приводит к (53.18).

Таким образом, с учетом запаздывания для пространственно однородной плазмы уравнение баланса энергии имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sum_a n_a \int \frac{p^2}{2m_a} f_a d\mathbf{p} + \frac{\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E}}{8\pi} \right\} = 0 \quad (53.21)$$

и, следовательно, сохраняется полная энергия плазмы.

В равновесном состоянии выражение (53.20) принимает вид

$$\begin{aligned} (\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_k &= \sum_a \frac{(4\pi)^2 e_a^2 n_a}{k^2} \int f_a(\mathbf{p}) d\mathbf{p} + \\ &+ \sum_{ab} \frac{(4\pi)^3 e_a^2 e_b^2 n_a n_b}{k' k T} \int \int_0^\infty (k\mathbf{v} - k'\mathbf{v}') \sin[(k\mathbf{v} - k'\mathbf{v}')\tau] f_{af} f_b d\tau d\mathbf{p} d\mathbf{p}'. \end{aligned} \quad (53.22)$$

Отсюда после интегрирования по  $\tau$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p}'$  получим

$$\begin{aligned} (\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_k &= \sum_a \frac{(4\pi)^2 e_a^2 n_a}{k^2} - \sum_{ab} \frac{(4\pi)^3 e_a^2 e_b^2 n_a n_b}{k' k T} = \\ &= \sum_a \frac{(4\pi)^2 e_a^2 n_a}{k^2} \left( 1 - \frac{1}{r_D^2 k^2} \right). \end{aligned} \quad (53.23)$$

Здесь использовано обозначение для радиуса Дебая.

Заметим, что это выражение может быть получено и из (36.18). Для этого запишем выражение (36.18) в виде

$$(\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_k = \frac{4\pi k T}{1 + r_D^2 k^2} = \sum_a \frac{(4\pi)^2 e_a^2 n_a}{k^2} \left( \frac{1}{1 + 1/r_D^2 k^2} \right) \quad (53.24)$$

и произведем разложение по  $1/r_D^2 k^2$  (разложение по поляризации). Тогда в первом приближении получим выражение (53.23).

#### § 54. Кинетическое уравнение Балеску — Ленарда для неидеальной плазмы

При выводе выражения для интеграла столкновений с учетом поляризации плазмы удобней вместо (53.1) использовать первое определение (33.5) для интеграла столкновений

$$I_a(\mathbf{p}, t) = - \frac{e_a}{n_a} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \int \text{Re}(\delta N_a \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, t} d\omega d\mathbf{k}. \quad (54.1)$$

В неидеальной плазме следует учитывать нестационарность флуктуационного процесса. Для этого поступим следующим образом.

Перепишем уравнение (35.1) в виде интегрального уравнения

$$\delta N_a(x, t) = \delta N_a^{\text{нст}} - e_a n_a \int_0^{\infty} \delta E(\mathbf{r} - \mathbf{v}\tau, t - \tau) \frac{\partial f_a(\mathbf{p}, t - \tau)}{\partial \mathbf{p}} d\tau. \quad (54.2)$$

В нулевом приближении по запаздыванию отсюда следует уравнение (35.2), в которое  $t$  входит как параметр.

Принимая во внимание, что интеграл столкновений (54.1) определяется спектральной плотностью быстрых флуктуаций (см. § 33), произведем в (54.2) разложение в интеграл Фурье по координатам и быстрому времени. Тогда из (53.2) получим уравнение

$$\begin{aligned} \delta N_a(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) = \\ = \delta N_a^{\text{нст}} - \frac{e_a n_a}{k^2} \int_0^{\infty} A(\tau) \mathbf{k} \frac{\partial f_a(\mathbf{p}, t - \tau)}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{k} \delta E(\omega, \mathbf{k}, t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (54.3)$$

Здесь для сокращения записи введено обозначение

$$A(\tau) = \exp[-\Delta\tau + i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\tau]. \quad (54.4)$$

Из уравнения Пуассона получим второе уравнение

$$\delta E(\omega, \mathbf{k}, t) = -\frac{i\mathbf{k}}{k^2} \sum_a 4\pi e_a \int \delta N_a(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}. \quad (54.5)$$

Если же использовать уравнение полного тока, то

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} - i(\omega + i\Delta) \right) \delta E(\omega, \mathbf{k}, t) = \\ = -4\pi \sum_a e_a \int \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{v})}{k^2} \delta N_a(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p} \equiv -4\pi \delta j(\omega, \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (54.6)$$

Исключим из (54.5)  $\delta N_a$  с помощью (54.3). В результате получим интегральное уравнение для  $\delta E(\omega, \mathbf{k}, t)$ :

$$\begin{aligned} \delta E(\omega, \mathbf{k}, t) - \\ - i \sum_a \frac{4\pi e_a^2 n_a}{k^2} \iint_0^{\infty} A(\tau) \mathbf{k} \frac{\partial f_a(\mathbf{p}, t - \tau)}{\partial \mathbf{p}} \delta E(\omega, \mathbf{k}, t - \tau) d\tau d\mathbf{p} = \\ = -4\pi \frac{i\mathbf{k}}{k^2} \sum_a e_a \int \delta N_a^{\text{нст}}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p} \equiv \delta E^{\text{нст}}. \end{aligned} \quad (54.7)$$

Для идеальной плазмы (§ 35) флуктуационный процесс, определяющий интеграл столкновений, можно было рассматривать как.

-стационарный и однородный процесс. Зависимость от времени в этом приближении входит неявно (через функции  $f_a$ ) и при расчете спектральных плотностей  $\delta N_a$ ,  $\delta E$  не учитывается. Для неидеальной (при учете временного запаздывания) плазмы вместо уравнений (35.2), (35.3) возникают интегральные уравнения (54.3), (54.7). Флуктуационный процесс теперь является нестационарным. Это существенно усложняет расчеты.

Мы уже проводили расчет спектральных плотностей флуктуаций  $\delta N_a$ ,  $\delta E$  для нестационарного процесса при выводе кинетических уравнений для плазмы в сильном высокочастотном поле (§§ 41—44). Там эту задачу удалось свести к более простой, когда нестационарность процесса определяется явной зависимостью внешнего электрического поля от времени. Здесь же для расчета спектральных плотностей будем использовать теорию возмущений по запаздыванию. Метод расчета, развитый в §§ 51, 52, здесь неудобен, поскольку не удается найти в явной форме решение интегрального уравнения (54.7).

В нулевом приближении по запаздыванию уравнение (54.7) совпадает с уравнением (35.3). Рассмотрим решение уравнения (54.7) в первом приближении по запаздыванию. Для этого проинтегрируем уравнение по  $\tau \partial/\partial \tau$  и удержим два первых члена разложения. В результате получим уравнение

$$\delta E(\omega, \mathbf{k}, t) - i \sum_a \frac{4\pi e_a^2 n_a}{k^2} \int_0^\infty A(\tau) \left(1 - \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \times \\ \times \mathbf{k} \frac{\partial f_a(\mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{p}} \delta E(\omega, \mathbf{k}, t) d\tau d\mathbf{p} = \delta E^{\text{нст}}(\omega, \mathbf{k}, t). \quad (54.8)$$

Произведем здесь интегрирование по  $\tau$ . С учетом обозначения (54.4) имеем

$$\int A(\tau) d\tau = \frac{i}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\Delta}, \quad \int A(\tau) \tau d\tau = -i \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{i}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\Delta}. \quad (54.9)$$

Используя выражение (35.5) для диэлектрической проницаемости, получим в первом приближении следующее уравнение:

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \delta E(\omega, \mathbf{k}, t) = \delta E^{\text{нст}} - i \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varepsilon(\omega, \mathbf{k}, t)}{\partial \omega} \frac{\delta E^{\text{нст}}}{\varepsilon} \right). \quad (54.10)$$

Рассмотрим уравнение баланса энергии с учетом временного запаздывания и поляризации плазмы. Для этого используем уравнение (54.6) и соответствующее уравнение для  $\delta E^*$ . Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{(\delta E \delta E^*)_{\omega, \mathbf{k}, t}}{8\pi} = -\text{Re}(\delta \mathbf{j} \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, t}. \quad (54.11)$$

Вспомним, что из кинетического уравнения (26.3) следует уравнение баланса для средней кинетической энергии плазмы.

Для пространственно однородного распределения оно имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_a n_a \int \frac{p^2}{2m_a} f_a dp = \overline{\delta j \delta E} \equiv \sum_a n_a \int \frac{p^2}{2m_a} I_a dp. \quad (54.12)$$

Для идеальной плазмы интеграл столкновений обладает свойствами (37.10), поэтому из (54.12) следует, что

$$\overline{\delta j \delta E} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \operatorname{Re} (\delta j \delta E)_{\omega, \mathbf{k}} d\omega d\mathbf{k} = 0. \quad (54.13)$$

Из (54.13), (54.11) видно, что для идеальной плазмы

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{(\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}}}{8\pi} d\omega d\mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{\delta E \delta E}}{8\pi} = 0 \quad (54.14)$$

и, следовательно, в уравнении баланса энергии вклад электрического поля равен нулю. Это согласуется, естественно, с результатами предыдущего параграфа.

Рассмотрим правую часть уравнения (54.11) с учетом временного запаздывания.

Для удобства расчета добавим к правой части (54.11) нулевой член  $\operatorname{Re} i\omega (\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, t}$  и рассмотрим выражение

$$-\operatorname{Re} (\delta j \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, t} + \operatorname{Re} i\omega \frac{(\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, t}}{4\pi} \equiv \operatorname{Re} \left( \frac{i\omega \delta E}{4\pi} - \delta j, \delta E \right)_{\omega, \mathbf{k}, t}. \quad (54.15)$$

Найдем из (54.3) функцию  $\delta j(\omega, \mathbf{k}, t)$ :

$$\delta j = \delta j^{\text{ист}} - \sum_a \frac{e_a^2 n_a}{k^2} \iint_0^\infty k v A(\tau) k \frac{\partial f_a(p, t-\tau)}{\partial p} \delta E(\omega, \mathbf{k}, t-\tau) d\tau dp. \quad (54.16)$$

С помощью этого выражения и выражения (54.7) преобразуем комбинацию функций, входящую в (54.15):

$$\begin{aligned} \frac{i(\omega + i\Delta) \delta E}{4\pi} - \delta j &= \frac{i(\omega + i\Delta) \delta E^{\text{ист}}}{4\pi} - \delta j^{\text{ист}} - \\ &- \sum_a \frac{e_a^2 n_a}{k^2} \iint_0^\infty ((\omega + i\Delta) - kv) A(\tau) k \frac{\partial f_a(p, t-\tau)}{\partial p} \delta E(\omega, \mathbf{k}, t-\tau) d\tau dp. \end{aligned} \quad (54.17)$$

Проинтегрируем по частям во втором члене этого выражения. Используя выражение (54.4) и учитывая, что подстановка  $\tau = 0, \infty$  при интегрировании по  $\tau$  дает нулевой результат,

получим следующее выражение:

$$\frac{i(\omega + i\Delta)\delta E}{4\pi} - \delta j = \frac{i(\omega + i\Delta)\delta E^{\text{нст}}}{4\pi} - \delta j^{\text{нст}} -$$

$$- i \sum_a \frac{e_a^2 n_a}{k^2} \int_0^\infty \int A(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{k} \frac{\partial f_a(\mathbf{p}, t - \tau)}{\partial \mathbf{p}} \delta E(\omega, \mathbf{k}, t - \tau) d\tau d\mathbf{p}. \quad (54.18)$$

Заменяем в этом выражении дифференцирование по  $\tau$  на дифференцирование по  $t$  ( $\partial/\partial\tau = -\partial/\partial t$ ). Поскольку интегральный член пропорционален  $\partial/\partial t$ , то в нем можно пренебречь запаздыванием. Используя значение первого интеграла (54.9) и выражение (35.5) для диэлектрической проницаемости, получим из (54.18) следующее выражение:

$$\frac{i(\omega + i\Delta)\delta E}{4\pi} - \delta j = - \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} - i(\omega + i\Delta) \right) \frac{\delta E^{\text{нст}}}{4\pi} + \delta j^{\text{нст}} \right] +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\delta E^{\text{нст}}}{\epsilon} \right).$$

В силу уравнения полного тока для флуктуаций  $\delta E^{\text{нст}}$ ,  $\delta j^{\text{нст}}$  выражение, стоящее здесь в квадратных скобках, обращается в нуль, поэтому

$$\frac{i(\omega + i\Delta)\delta E}{4\pi} - \delta j = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\delta E^{\text{нст}}}{\epsilon} \right). \quad (54.19)$$

Подставив это выражение в (54.15), найдем

$$- \text{Re} (\delta j \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, t} = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{(\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, t}^{\text{нст}}}{|\epsilon(\omega, \mathbf{k}, t)|^2} \right]. \quad (54.20)$$

Здесь  $(\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, t}^{\text{нст}}$  — спектральная плотность флуктуаций  $\delta E^{\text{нст}}$  в нулевом приближении по запаздыванию. Она определяется выражением (34.14), т. е.

$$(\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, t}^{\text{нст}} = \sum_a \frac{(4\pi)^2 e_a^2 n_a}{k^2} \int 2\pi \delta(\omega - k\nu) f_a d\mathbf{p}. \quad (54.21)$$

Таким образом, из уравнений баланса средней кинетической энергии (54.12) и уравнения баланса энергии поля (54.11), (54.20) снова следует уравнение сохранения полной энергии (53.21). Теперь, однако, вместо (53.22) для пространственной спектральной плотности флуктуаций поля имеет место более общее выражение

$$(\delta E \delta E)_{\mathbf{k}, t} = \sum_a \frac{(4\pi)^2 e_a^2 n_a}{k^2} \int \frac{f_a(\mathbf{p}, t)}{|\epsilon(k\nu, \mathbf{k})|^2} d\mathbf{p}, \quad (54.22)$$

которое следует из (54.21). Выражение (53.23) следует в частном случае из (54.22). Для этого надо произвести разложение по поляризационным членам, удержать члены первого порядка и использовать приближение локального равновесия.

Рассмотрим теперь интеграл столкновений с учетом поляризации и временного запаздывания.

Как и в § 53, спектральную плотность флуктуаций  $\delta N_a$ ,  $\delta \mathbf{E}$  можно представить в виде суммы двух частей (53.7). В соответствии с этим интеграл столкновений

$$I_a = I_a^{\text{инд}} - \frac{e_a}{n_a} \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial p} \int \text{Re} (\delta N_a^{\text{нст}} \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}, p, t} d\omega d\mathbf{k} \equiv I_a^{\text{инд}} + I_a^{\text{нст}}. \quad (54.23)$$

Из (54.3) следует, что индуцированная часть интеграла столкновений определяется выражением [7, 40]

$$I_a^{\text{инд}} = \frac{e_a^2}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial p} \text{Re} \iint_0^{\infty} \frac{\mathbf{k}}{k^2} \exp[-\Delta\tau + i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\tau] \times \\ \times (\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}, t, t-\tau}^* \mathbf{k} \frac{\partial j_a(p, t-\tau)}{\partial p} d\tau d\omega d\mathbf{k}. \quad (54.24)$$

Входящую сюда спектральную плотность флуктуаций поля можно в первом приближении по запаздыванию представить в виде

$$(\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}, t, t-\tau}^* = (\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}, t}^* - \tau \left( \delta \mathbf{E} \frac{\partial \delta \mathbf{E}}{\partial t} \right)_{\omega, \mathbf{k}, t}^* = \\ = (1 + i\omega\tau) (\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}, t} + \tau 4\pi (\delta \mathbf{j} \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}, t}. \quad (54.25)$$

Здесь использовано уравнение полного тока для  $\delta \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}, t)$ .

С помощью выражений (54.10), (54.16) спектральные плотности, стоящие в правой части равенства (54.25), можно выразить через спектральные плотности флуктуаций источника (см. (52.12)). Прделав это, получим явное выражение для  $I_a^{\text{инд}}$ . Мы не приводим здесь соответствующие выкладки, так как в дальнейшем (в § 57) нам понадобится лишь выражение (54.24).

Рассмотрим второй член в правой части равенства (54.23). Используя выражение (54.10) для функции  $\delta \mathbf{E}^*$ , запишем выражение для  $I_a^{\text{нст}}$  в виде

$$I_a^{\text{нст}} = -\frac{e_a}{n_a} \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial p} \int \text{Re} \left\{ \frac{1}{\varepsilon^*} \left( 1 + i \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\varepsilon^*} \right) (\delta N_a \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}, p}^{\text{нст}} + \right. \\ \left. + i \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \omega} \frac{1}{\varepsilon^{*2}} \left( \delta N_a \frac{\partial \delta \mathbf{E}}{\partial t} \right)_{\omega, \mathbf{k}, p}^{\text{нст}} \right\} d\omega d\mathbf{k}. \quad (54.26)$$

Входящая сюда спектральная плотность  $(\delta N_a \delta E)_{\omega, k, p}^{\text{нст}}$  определяется выражением (52.12). Для второй спектральной плотности в (54.26) с помощью формул (52.11), (52.12)<sub>1</sub> находим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \left( \delta N_a \frac{\partial \delta E}{\partial t} \right)_{\omega, k, p}^{\text{нст}} &= \frac{k}{k^2} 4\pi e_a n_a 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} (\omega - kv) \times \\ &\times \exp[-\Delta\tau + i(\omega - kv)\tau] f_a(p, t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (54.27)$$

Таким образом, с помощью формул (52.12)<sub>1</sub>, (54.27) из (54.26) находим явное выражение для  $I_a^{\text{нст}}$ .

Результаты (54.24), (54.26) и определяют искомым интеграл столкновений для неидеальной плазмы с учетом поляризации среды. В нулевом приближении по запаздыванию он совпадает с интегралом столкновений Балеску — Ленарда (в форме (37.2)).

Интеграл столкновений для неидеальной плазмы с учетом поляризации обладает теми же свойствами (53.17), (53.19), что и интеграл столкновений Ландау для неидеальной плазмы. Разница лишь в том, что энергия поля определяется теперь выражением (54.22), в котором полностью учтена поляризация плазмы.

### § 55. Интеграл столкновений для неидеальной плазмы с учетом усредненной динамической поляризации

Рассмотрим интеграл столкновений для неидеальной плазмы, в котором путем введения эффективного потенциала приближенно учитывается вклад динамической поляризации.

Эффективный потенциал определяется формулами (47.2), (47.6). Если в этих формулах использовать локально равновесное распределение по скоростям, то для эффективного потенциала будут справедливы выражения (47.4), (47.3):

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{ab}(k) &= v_{ab}(k) \frac{r_D^2 k^2}{1 + r_D^2 k^2}, \quad \text{где } v_{ab}(k) = 4\pi e_a e_b / k^2, \\ \tilde{\Phi}_{ab}(r) &= \frac{e_a e_b}{r} e^{-r/r_D}. \end{aligned} \quad (55.1)$$

В этом приближении для определения интеграла столкновений можно использовать результаты § 53 с той разницей, что при расчете спектральной плотности (53.7) вместо фурье-компоненты кулоновского потенциала  $v_{ab}(k) = 4\pi e_a e_b / k^2$  следует использовать выражение (55.1) для  $\tilde{v}_{ab}(k)$ . Тогда для интеграла столкновений можно использовать выражение (53.16), если в нем

$$\frac{k_i k_j}{k^4} \rightarrow \frac{k_i k_j}{k^4} \frac{r_D^2 k^2}{1 + r_D^2 k^2}. \quad (55.2)$$



Рассмотрим свойства нового интеграла столкновений. Свойства (53.17) останутся, естественно, неизменными, а вместо (53.18) теперь надо использовать выражение

$$\sum_a n_a \int \frac{p^2}{2m_a} I_a d\mathbf{p} = - \sum_{ab} \frac{e_a^+ e_b^- n_a n_b}{\pi} \iint_0^\infty e^{-2\Delta\tau} \sin[(\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}')\tau] \times \\ \times \frac{r_D^2 k^2}{k^4(1+r_D^2 k^2)} \mathbf{k} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} \right) \frac{\partial}{\partial t} f_a(\mathbf{p}, t - \tau) f_b(\mathbf{p}', t - \tau) d\mathbf{k} d\tau d\mathbf{p} d\mathbf{p}'. \quad (55.3)$$

Отсюда для случая локального равновесия в первом приближении по запаздыванию

$$\sum_a n_a \int \frac{p^2}{2m_a} I_a d\mathbf{p} = - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{ab} \frac{n_a n_b}{2} \int \frac{4\pi e_a^+ e_b^-}{k^2} g_{ab}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (55.4)$$

Здесь

$$g_{ab}(\mathbf{k}) = - \frac{e_a^+ e_b^-}{\sum_c e_c^+ n_c} \frac{1}{1 + r_D^2 k^2} \quad (55.5)$$

— фурье-компонента пространственной корреляционной функции заряженных частиц (см. (36.22)).

Перейдем в (55.4) к координатному представлению. Для этого используем значение интеграла (36.23). В результате

$$\sum_a n_a \int \frac{p^2}{2m_a} I_a d\mathbf{p} = - \frac{\partial}{\partial t} \sum_{ab} \frac{n_a n_b}{2} \int \frac{e_a^+ e_b^-}{|\mathbf{r}|} g_{ab}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (55.6)$$

Здесь

$$g_{ab}(\mathbf{r}) = - \frac{e_a^+ e_b^-}{\kappa T} \frac{1}{r} e^{-r/r_D} \quad (55.7)$$

— пространственная корреляционная функция для кулоновской плазмы в дебаевском (поляризационном) приближении. Напомним, что мы рассматриваем приближение локального равновесия, поэтому температура  $T$  в (55.6) является функцией координат и времени.

Из (54.12), (55.6) следует закон сохранения энергии

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad (55.8)$$

$$U = \sum_a n_a \int \frac{p^2}{2m_a} f_a d\mathbf{p} + \frac{1}{2} \sum_{ab} n_a n_b \int \frac{e_a^+ e_b^-}{|\mathbf{r}|} g_{ab}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Функция  $g_{ab}$  определяется выражением (55.7).

Если в выражение (55.8) для  $U$  включить собственную энергию, которая согласно (53.23) определяется выражением

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{8\pi} \sum_a \frac{(4\pi)^2 e_a^2 n_a}{k^2} dk, \quad (55.9)$$

то равенство (55.4) примет вид

$$\sum_a n_a \int \frac{p^2}{2m_a} I_a dp = - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{8\pi} \frac{4\pi k T}{1 + r_D^2 k^2} dk = - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{\delta E \delta E}}{8\pi}. \quad (55.10)$$

Здесь использовано выражение (53.24) для спектральной плотности флуктуаций поля в состоянии локального равновесия в поляризованном приближении.

Из (54.12), (55.10) следует закон сохранения энергии в виде (53.21).

Заметим, что для пространственно однородной плазмы двухчастичная функция распределения связана с корреляционной функцией равенством

$$f_{ab} = 1 + g_{ab}(r), \quad (55.11)$$

поэтому выражение для внутренней энергии в законе сохранения (55.8) можно записать в виде

$$U = \sum_a n_a \int \frac{p^2}{2m_a} f_a dp + \frac{1}{2} \sum_{ab} n_a n_b \int \frac{e_a e_b}{|r|} f_{ab}(r) dr. \quad (55.12)$$

В общем случае, когда нет локального равновесия, пространственная фурье-компонента корреляционной функции определяется выражением

$$g_{ab}(k, p, p', t) = i\tilde{v}_{ab}(k) \int_0^\infty \exp[-2\Delta\tau - ik(v - v')\tau] \times \\ \times k \left( \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p'} \right) f_a(p, t - \tau) f_b(p', t - \tau) d\tau. \quad (55.13)$$

В приближении локального равновесия отсюда следует (55.5).

Формула (55.13) следует из (53.2), (53.5), (53.6) с учетом равенства

$$(\delta N_a \delta N_b)_{k, p, p', t} = \delta_{ab} \delta(p - p') n_a f_a + n_a n_b g_{ab}(k, p, p', t). \quad (55.14)$$

Используя это соотношение, интеграл столкновений (53.1)

можно представить в виде

$$I_a(\mathbf{p}, t) = \sum_b n_b \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{e_a e_b}{|\mathbf{r}|} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} g_{ab}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{p}', t) d\mathbf{r} d\mathbf{p} d\mathbf{p}' = \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_b n_b \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \int \mathbf{k} \frac{4\pi e_a e_b}{k^2} \text{Im} g_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}', t) d\mathbf{k} d\mathbf{p}'. \quad (55.15)$$

Из выражений (55.13), (55.15) следует, что в первом приближении по запаздыванию интеграл столкновений можно представить в виде

$$I_a(\mathbf{p}, t) = I_{a1} + I_{a2}. \quad (55.16)$$

Здесь  $I_{a1}$  — интеграл столкновений идеальной плазмы (нулевое приближение по запаздыванию). Интеграл  $I_{a2}$  определяет вклад взаимодействия в недиссипативные характеристики. Из формул (55.13), (55.15) находим [7, 40]

$$I_{a1}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{8\pi^2} \sum_b n_b \frac{\partial}{\partial p_i} \int k_i k_j v_{ab}(\mathbf{k}) \tilde{v}_{ab}(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}') \times \\ \times \left( \frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{\partial}{\partial p'_j} \right) f_a(\mathbf{p}, t) f_b(\mathbf{p}', t) d\mathbf{k} d\mathbf{p}', \quad (55.17)$$

$$I_{a2}(\mathbf{p}, t) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \sum_b n_b \frac{\partial}{\partial p_i} \int_0^\infty \int k_i k_j v_{ab}(\mathbf{k}) \tilde{v}_{ab}(\mathbf{k}) \cos[(\mathbf{k}\mathbf{v} - \\ - \mathbf{k}\mathbf{v}')\tau] \left( \frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{\partial}{\partial p'_j} \right) \frac{\partial}{\partial t} f_a(\mathbf{p}, t) f_b(\mathbf{p}', t) \tau d\tau d\mathbf{k} d\mathbf{p}'. \quad (55.18)$$

Входящие сюда функции  $v_{ab}(\mathbf{k})$ ,  $\tilde{v}_{ab}(\mathbf{k})$  определяются выражениями (55.1).

Выражения (55.16)—(55.18) соответствуют формулам (13.11)—(13.13) для газа. Различие в том, что формулы (13.12), (13.13) получены в приближении теории возмущений по взаимодействию. В выражениях же (55.17), (55.18) путем введения эффективного потенциала  $\tilde{\Phi}_{ab}(\mathbf{r})$  произведен учет усредненной динамической поляризации плазмы.

## § 56. Кинетическое уравнение Больцмана для неидеальной плазмы

В §§ 37, 54 были рассмотрены кинетические уравнения в поляризационном приближении (первое приближение по плазменному параметру) для идеальной и неидеальной плазмы.

В поляризационном приближении вклад взаимодействия на малых расстояниях учитывается неточно. Это проявляется,

в частности в том, что в интеграле столкновений Балеску — Ленарда при интегрировании по волновым числам возникает логарифмическая расходимость при больших  $k$  (малых расстояниях). Вследствие этого приходится производить обрезание области интегрирования на некотором значении  $k_{\max}$  (см. § 37). Поскольку  $k_{\max}$  входит в интеграл столкновений под знаком логарифма, то значения кинетических коэффициентов мало чувствительны к выбору границы области интегрирования.

Для неидеальной плазмы положение иное. Вклад взаимодействия частиц на малых расстояниях в недиссипативные характеристики является существенным, поэтому использование поляризационного приближения недостаточно. Необходимо иметь кинетические уравнения, в которых корректно учитывается вклад взаимодействия частиц как на больших, так и на малых расстояниях.

Заметим, что приближение парных столкновений, приводящее к кинетическому уравнению Больцмана (см. §§ 10, 12), может быть использовано и для плазмы при учете вклада взаимодействия частиц на малых расстояниях ( $r \ll r_D$ ), когда коллективные эффекты не являются существенными. Однако из-за медленности убывания взаимодействия заряженных частиц с расстоянием интеграл столкновений Больцмана содержит при интегрировании по  $k$  расходимость при малых  $k$  (большие расстояния). В поляризационном приближении, наоборот, корректно учитывается вклад взаимодействия частиц на больших расстояниях и недостаточно корректно на малых расстояниях.

Попробуем объединить эти два противоположных приближения.

Наиболее простое решение этой задачи состоит в использовании в качестве интеграла столкновений комбинации трех интегралов столкновений: Больцмана  $I_a^B$ , Ландау  $I_a^L$ , Балеску — Ленарда  $I_a^{B-L}$ :

$$I_a = I_a^B - I_a^L + I_a^{B-L}. \quad (56.1)$$

В этом выражении, если использовать его для идеальной плазмы, интеграл  $I_a^L$  компенсирует логарифмическую расходимость в интеграле Больцмана при малых  $k$  (большие расстояния) и логарифмическую расходимость в интеграле столкновений Балеску — Ленарда  $I_a^{B-L}$  при больших  $k$  (малые расстояния).

Такое обобщение интеграла столкновений привлекательно своей простотой, но для неидеальной плазмы не является удовлетворительным. Покажем это.

Интеграл столкновений Больцмана для неидеальной плазмы в первом приближении по запаздыванию может быть записан

сразу по аналогии с соответствующим выражением (12.5) для газа:

$$I_a^B(\mathbf{p}, t) = \sum_b n_b \int \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f_a(\mathbf{P}(-\infty), t) f_b(\mathbf{P}'(-\infty), t) d\mathbf{r}' d\mathbf{p}' - \\ - \sum_b n_b \int_0^\infty \int \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \tau \frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau} f_a(\mathbf{P}(-\tau), t) f_b(\mathbf{P}'(-\tau), t) d\tau d\mathbf{r}' d\mathbf{p}'. \quad (56.2)$$

Здесь

$$\Phi_{ab}(\mathbf{r}) = e_a e_b / |\mathbf{r}|. \quad (56.3)$$

Как и в случае газа, второй член в (56.2) определяет вклад взаимодействия в недиссипативные характеристики плазмы.

Интеграл столкновений Ландау  $I_a^L$  для неидеальной плазмы определяется выражением (53.16), а интеграл столкновений Балеску — Ленарда — выражениями (54.24), (54.26). Если учитывать вклад лишь усредненной динамической поляризации, то вместо (54.24), (54.26) можно использовать более простые выражения (55.17), (55.18).

Рассмотрим добавку к энергии плазмы, обусловленную учетом неидеальности. Она определяется корреляционной функцией  $g_{ab}(\mathbf{r})$ . Для приближения Больцмана

$$g_{ab}^B(\mathbf{r}) = \exp\left[-\frac{e_a e_b}{r\kappa T}\right] - 1. \quad (56.4)$$

В приближении Ландау используется теория возмущений по взаимодействию, поэтому из (56.4)

$$g_{ab}^L(\mathbf{r}) = -\frac{e_a e_b}{r\kappa T}. \quad (56.5)$$

Наконец, в поляризационном приближении, приводящем к интегралу столкновений Балеску — Ленарда,

$$g_{ab}^{B-L}(\mathbf{r}) = -\frac{e_a e_b}{\kappa T r} e^{-r/r_D} \quad (56.6)$$

— корреляционная функция Дебая.

В соответствии с предполагаемой структурой интеграла столкновений в виде (56.1) вклад взаимодействия частиц в энергию плазмы будет определяться корреляционной функцией

$$g_{ab}(\mathbf{r}) = \exp\left[-\frac{e_a e_b}{\kappa T r}\right] - 1 + \frac{e_a e_b}{\kappa T r} - \frac{e_a e_b}{\kappa T r} e^{-r/r_D}. \quad (56.7)$$

Отсюда следует, что на больших расстояниях второй член, соответствующий члену  $I_a^L$  в (56.1), компенсирует первый член

лишь в первом приближении теории возмущений. Вследствие этого корреляционная функция (56.7) на больших расстояниях убывает не экспоненциально по закону  $\exp(-r/r_D)$ , а как  $1/r^2$ . Это показывает, что приближение (56.1) не является удовлетворительным для описания процессов в неидеальной плазме.

Развиты и другие способы определения интеграла столкновений для плазмы, не содержащего расходимости. Один из них состоит в замене кулоновского потенциала дебаевским, т. е.

$$\Phi_{ab} = \frac{e_a e_b}{r} \rightarrow \frac{e_a e_b}{r} e^{-r/r_D} \equiv \Phi_{ab}^D. \quad (56.8)$$

Такое приближение также приводит к неправильному выражению для термодинамических функций. Так, например, при вычислении плотности внутренней энергии в дебаевском приближении вклад взаимодействия будет определяться выражением

$$\frac{1}{2} \sum_{ab} n_a n_b \int \Phi_{ab}^D(\mathbf{r}) \Phi_{ab}^D(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (56.9)$$

что не совпадает с (60.11) — результатом равновесной теории.

Такое несоответствие вполне естественно, так как выбор потенциала в виде (56.8) предполагает, что равновесная пространственная корреляция устанавливается быстрее, чем равновесное распределение по импульсам. Однако нет оснований считать поляризацию статической.

Интеграл столкновений для неидеальной плазмы, в котором корректно учитывается вклад взаимодействия частиц на малых расстояниях и на больших расстояниях, очень сложен. Вследствие этого мы рассмотрим упрощенное описание, при котором путем введения эффективного потенциала на больших расстояниях учитывается усредненный вклад динамической поляризации.

Напомним, что эффективный потенциал определяется формулами (47.2), (47.6). Будем для упрощения предполагать, что в  $\tilde{\Phi}_{ab}$  функция  $f_a$  — локальное распределение Максвелла. Тогда функции  $\tilde{v}_{ab}(\mathbf{k})$ ,  $\tilde{\Phi}_{ab}(\mathbf{r})$  будут определяться формулами (55.1).

В этом приближении вклад взаимодействия частиц на больших расстояниях в кинетическое уравнение описывается, как мы знаем, интегралом столкновений (53.16), если в нем произвести замену (55.2), т. е. интегралом

$$\begin{aligned} I_a(\mathbf{p}, t) = & \sum_b \frac{2}{\pi} e_a^2 e_b^2 n_b \frac{\partial}{\partial p_i} \int_0^\infty \int \frac{k_j k_j}{k'} \frac{r_D^2}{1 + r_D^2 k^2} \exp[-2\Delta\tau - i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}')\tau] \times \\ & \times \left( \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p'_i} \right) f_a(\mathbf{p}, t - \tau) f_b(\mathbf{p}', t - \tau) d\tau d\mathbf{k} d\mathbf{p}'. \quad (56.10) \end{aligned}$$

В первом приближении по запаздыванию это выражение можно представить в виде (55.16), где  $I_{a1}$ ,  $I_{a2}$  определяются выражениями (55.17), (55.18).

Чтобы учесть вклад взаимодействия на малых расстояниях, поступим следующим образом.

Для функции распределения  $f_{ab}(x, x', t)$  используем уравнение, аналогичное уравнению (10.2) для пространственно однородного газа. В этом уравнении вместо потенциала парного взаимодействия  $\Phi_{ab}(r)$  используем эффективный потенциал  $\tilde{\Phi}_{ab}(r)$ . Это позволит при определении функции  $f_{ab}$  учесть влияние усредненной динамической поляризации. Принимая во внимание, что при пространственно однородном распределении в интеграле столкновений корреляционную функцию  $g_{ab}$  можно заменить на функцию распределения  $f_{ab}$ , запишем исходную замкнутую систему уравнений для функций  $f_a$ ,  $f_{ab}$  в виде

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} = \sum_b n_b \int \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial p} f_{ab} dx' \equiv I_a, \quad (56.11)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} + v' \frac{\partial}{\partial r'} - \frac{\partial \tilde{\Phi}_{ab}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial \tilde{\Phi}_{ab}}{\partial r'} \frac{\partial}{\partial p'} \right) f_{ab}(x, x', t) = \\ = \frac{\partial}{\partial t} f_a(p, t) f_b(p', t). \end{aligned} \quad (56.12)$$

Существенно здесь, что эффективный потенциал входит лишь в уравнение для функции  $f_{ab}$ . Это соответствует тому, что поляризация плазмы в интеграле столкновений учитывается лишь через посредство корреляционной функции  $g_{ab}$  (или функции распределения  $f_{ab}$ ).

Вследствие аналогии уравнений (56.12), (10.2) мы сразу можем записать решение уравнения (56.12), используя решения (12.4) уравнения (10.2). Тогда в первом приближении по запаздыванию решение уравнения (56.12) можно записать в виде [7]

$$\begin{aligned} f_{ab} = f_a(\tilde{P}(-\infty), t) f_b(\tilde{P}'(-\infty), t) - \\ - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} \tau \frac{d}{d\tau} f_a(\tilde{P}(-\tau), t) f_b(\tilde{P}'(-\tau), t) d\tau. \end{aligned} \quad (56.13)$$

Здесь  $\tilde{P}(-\tau)$ ,  $\tilde{P}'(-\tau)$  — начальные (в момент  $t - \tau$ ) импульсы двух частиц, взаимодействующих по закону  $\tilde{\Phi}_{ab}(r)$ .

Из (56.11), (56.13) следует, что интеграл столкновений можно снова представить в виде [7]

$$I_a(p, t) = I_{a1} + I_{a2}, \quad (56.14)$$

где

$$I_{a1}(\mathbf{p}, t) = \sum_b n_b \int \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f_a(\tilde{\mathbf{P}}(-\infty), t) f_b(\tilde{\mathbf{P}}'(-\infty), t) d\mathbf{r}' d\mathbf{p}', \quad (56.15)$$

$$I_{a2}(\mathbf{p}, t) = - \frac{\partial}{\partial t} \sum_b n_b \int \int_0^\infty \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \tau \frac{d}{d\tau} f_a(\tilde{\mathbf{P}}(-\tau), t) f_b(\tilde{\mathbf{P}}'(-\tau), t) d\tau d\mathbf{r}' d\mathbf{p}'. \quad (56.16)$$

Эти выражения аналогичны соответствующим формулам (10.5), (12.6) для газа. Однако выражение (56.15) существенно отличается от интеграла столкновений Больцмана, так как благодаря введению эффективного потенциала учитывается вклад не только парных (на малых расстояниях), но и коллективных (на больших расстояниях) взаимодействий частиц.

Интеграл столкновений (56.14) для неидеальной плазмы обладает свойствами

$$\sum_a n_a \int \Phi_a I_a d\mathbf{p} = 0 \quad \text{при } \Phi_a = 1, \mathbf{p}, \quad (56.17)$$

обеспечивающими выполнение законов сохранения числа частиц и импульса плазмы. При  $\Phi_a = p^2/2m_a$  из (56.14) — (56.16) следует результат, аналогичный результату (12.15):

$$\sum_a n_a \int \frac{p^2}{2m_a} I_a d\mathbf{p} = - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \sum_{ab} n_a n_b \int \Phi_{ab}(\mathbf{r}) \times \\ \times f_a(\tilde{\mathbf{P}}(-\infty), t) f_b(\tilde{\mathbf{P}}'(-\infty), t) d\mathbf{r} d\mathbf{p} d\mathbf{p}'. \quad (56.18)$$

Используя это свойство, снова приходим к закону сохранения внутренней энергии  $U$  с учетом взаимодействия

$$\partial U / \partial t = 0, \quad (56.19)$$

где

$$U = \sum_a n_a \int \frac{p^2}{2m_a} f_a d\mathbf{p} + \frac{1}{2} \sum_{ab} n_a n_b \int \Phi_{ab}(\mathbf{r}) \times \\ \times f_a(\tilde{\mathbf{P}}(-\infty), t) f_b(\tilde{\mathbf{P}}'(-\infty), t) d\mathbf{r} d\mathbf{p} d\mathbf{p}'. \quad (56.20)$$

Отсюда видно, что вклад взаимодействия в плотность внутренней энергии определяется нулевым приближением (по запыздыванию) функции (56.13).

В состоянии локального равновесия, используя закон сохранения энергии

$$\frac{\tilde{P}^2(-\infty)}{2m_a} + \frac{\tilde{P}'^2(-\infty)}{2m_b} = \frac{p^2}{2m_a} + \frac{p'^2}{2m_b} + \tilde{\Phi}_{ab}(\mathbf{r}), \quad (56.21)$$



где

$$\tilde{\Phi}_{ab}(r) = \frac{e_a e_b}{r} e^{-r/r_D}, \quad (56.22)$$

получим из (56.13) для пространственной функции распределения следующее выражение:

$$f_{ab}(r) = e^{-\tilde{\Phi}_{ab}/\kappa T} = \exp \left[ -\frac{e_a e_b}{\kappa T r} e^{-r/r_D} \right]. \quad (56.23)$$

На малых расстояниях это выражение совпадает с распределением Больцмана для частиц, взаимодействующих по закону Кулона, а на больших расстояниях — с распределением Дебая.

Из (56.20), (56.23) находим выражение для плотности внутренней энергии в приближении локального равновесия

$$U = \sum_a n_a \frac{3}{2} \kappa T + \frac{1}{2} \sum_{ab} n_a n_b \int \frac{e_a e_b}{r} \exp \left[ -\frac{e_a e_b}{\kappa T r} e^{-r/r_D} \right] dr. \quad (56.24)$$

Подведем некоторые итоги.

Выражения (56.14)—(56.16) определяют интеграл столкновений для неидеальной плазмы, в котором в приближении эффективного потенциала произведено объединение приближений парных столкновений и поляризационного приближения. Мы видели, каким образом учет неидеальности плазмы и учет, путем введения эффективного потенциала, усредненной динамической поляризации сказываются на термодинамических функциях плазмы. Оба эти фактора влияют также и на кинетические коэффициенты. Покажем это на примере электрической проводимости.

При частотах электрического поля  $\omega$ , много меньших частоты  $\omega_L$ , проводимость определяется формулой (48.19). Если вычисление проводимости проводить на основе интеграла Ландау, то частота в (48.19) пропорциональна кулоновскому логарифму  $L$  (см. (48.20)). При учете усредненной динамической поляризации  $L \rightarrow L' = \ln \sqrt{1 + r_D^2 k_{\max}^2} > L$ . Таким образом, расчет проводимости с учетом поляризации дает меньшее значение проводимости. При малых значениях плазменного параметра, т. е. в слабо неидеальной плазме, относительное уменьшение проводимости порядка  $\mu$ .

При выводе формулы (48.19) для проводимости достаточно использовать лишь интеграл столкновений  $I_{a1}$  в (56.14). Это и было фактически сделано в § 48. Второй член в (56.14), т. е. член  $I_{a2}$  (56.16), учитывает неидеальность в пространственно однородной плазме и при отсутствии внешних полей. В этом случае для включения эффектов неидеальности в интеграл столкновения достаточно учесть запаздывание функций  $f_a$ .

В пространственно однородной плазме, но при наличии внешнего поля этого уже недостаточно. Для полного учета эффектов неидеальности необходимо при расчете спектральных функций учитывать действие среднего поля. Это приводит к зависимости интеграла столкновений  $I_a$  от поля (см. гл. 8). Если поле слабое, то в выражении (56.14) для интеграла столкновений появится дополнительный член, пропорциональный полю. Вследствие этого при расчете проводимости поле  $\mathbf{E}$  заменяется на действующее (эффективное) поле  $\mathbf{E}_{\text{эфф}}$  (см. (48.131)) и проводимость

$$\sigma \rightarrow \sigma \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{e^2}{r_D kT} \right) \sim \sigma (1 - \mu). \quad (56.25)$$

Мы видим, что учет зависимости интеграла столкновений от поля в слабом поле дает дополнительное уменьшение значения проводимости плазмы. Изменение величины проводимости снова пропорционально плазменному параметру  $\mu$ .

Таким образом, при расчете проводимости плазмы неидеальность плазмы проявляется дважды: через эффективный потенциал и через зависимость интеграла столкновений от поля. В пространственно неоднородной плазме в интеграле столкновений (56.14) появится еще один член (см. гл. 10). Это приводит к появлению соответствующих дополнительных вкладов в коэффициенты диффузии, вязкости и теплопроводности. В слабо неидеальной плазме эти дополнительные вклады также пропорциональны плазменному параметру  $\mu$ .

Расчет проводимости проводился нами без учета влияния электрон-электронных столкновений. При низких частотах ( $\omega \ll \nu_{ee}$ ) электрон-электронные столкновения существенны [42]. Это не меняет, однако, сделанные выводы о дополнительном уменьшении электрической проводимости за счет эффектов неидеальности плазмы.

## § 57. Взаимодействие заряженных частиц с плазмонами

В интегралах столкновений для идеальной и неидеальной плазмы учитывается вклад флуктуаций  $\delta N_a$ ,  $\delta \mathbf{E}$ , времена корреляции которых  $\tau_{\text{кор}}$  меньше времени свободного пробега, т. е. характерного времени изменения функции  $f_a$ . Флуктуации, удовлетворяющие этому условию, в свою очередь можно подразделить на две группы: флуктуации, для которых времена корреляции  $\delta \mathbf{E}$  много меньше  $r_D/v_T$ , и флуктуации, для которых  $r_D/v_T < \tau_{\text{кор}} < \tau_a$ . Радиусы корреляции флуктуаций первой группы меньше  $r_D$ , а второй — больше  $r_D$ , но меньше длины свободного пробега  $l_a$ , т. е.

$$r_D < r_{\text{кор}} < l_a. \quad (57.1)$$

Напомним (см. § 33), что при выводе кинетического уравнения для плазмы физически бесконечно малый элемент длины  $l_\phi \sim r_D$ , поэтому флуктуации поля с  $r_{\text{кор}}$  (57.1) нельзя полностью выразить через  $f_a$ ,  $\delta E^{\text{ист}}$  по формуле (54.10). Вследствие этого интеграл столкновений (54.28) нельзя полностью выразить через функции  $f_a$ . Для спектральной плотности флуктуаций поля с  $r_{\text{кор}}$  в интервале (57.1) надо записать дополнительное уравнение.

Флуктуации  $\delta E$  с  $r_{\text{кор}}$  в интервале (57.1) можно рассматривать как случайные волны в бесстолкновительной плазме. Их принято называть плазмонами.

Согласно (32.13), (32.14) для волн в бесстолкновительной кулоновской плазме (опускаем штрих у  $\omega'$  и знак  $\parallel$  у  $\epsilon^{\parallel}$ )

$$\text{Re } \epsilon(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad \gamma(\mathbf{k}) = \text{Im } \epsilon / (\partial \text{Re } \epsilon / \partial \omega). \quad (57.2)$$

Здесь первое уравнение определяет связь  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  (дисперсионное уравнение), а второе определяет декремент затухания. Выражения (57.2) справедливы при условиях

$$\omega(\mathbf{k}) > \gamma(\mathbf{k}) > v_a. \quad (57.3)$$

Мнимая часть диэлектрической проницаемости

$$\text{Im } \epsilon = - \sum_a \frac{4\pi^2 e_a^2 n_a}{k^2} \int \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \mathbf{k} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p} \quad (57.4)$$

и, следовательно, пропорциональна (при  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{x}$ ) производной функции распределения  $f_a(p_x)$  при  $v_x = \omega/k$ . При  $\gamma(\mathbf{k}) \ll \omega(\mathbf{k})$  фазовая скорость много больше тепловой скорости, поэтому скорости частиц, взаимодействующих с волнами, велики по сравнению с тепловыми скоростями. Для распределения по скоростям, не очень сильно отличающегося от равновесного, число частиц с  $v_x = \omega/k$  мало. Этим и обусловлена малость  $\text{Im } \epsilon$ .

Выделим в интегралах столкновений (54.24), (54.26) для неидеальной плазмы вклады, определяемые плазмонами. Для области (57.1) в равенстве (54.25) можно

$$\left( \frac{\partial \delta E}{\partial t} \delta E \right)_{\omega, \mathbf{k}, t} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, t}. \quad (57.5)$$

Отброшенный член пропорционален

$$\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \mathbf{k} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial t}$$

и является поэтому членом второго порядка. Таким образом, вклад плазмонов в  $I_a^{\text{ннд}}$  определяется выражением

$$[I_a^{\text{ннд}}]_{\text{пл}} = \frac{e_a^2}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial p} \operatorname{Re} \int_0^\infty \int \frac{k}{k^2} \exp[-\Delta\tau + i(\omega - kv)\tau] \times \\ \times (\delta\mathbf{E} \delta\mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}, t-\tau/2} \mathbf{k} \frac{\partial f_a(p, t-\tau)}{\partial p} d\tau d\omega d\mathbf{k}. \quad (57.6)$$

Здесь следует, разумеется, удерживать лишь члены первого приближения по запаздыванию.

Запишем в этом же приближении выражение, определяющее вклад плазмонов в  $I_a^{\text{нст}}$ . Для этого обратимся к формуле (54.26).

При условиях (57.2), (57.3) в выражении (54.26) члены, содержащие производные по времени, оказываются второго порядка малости, поэтому в первом приближении

$$[I_a^{\text{нст}}]_{\text{пл}} = -\frac{e_a}{n_a} \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial p} \int \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\varepsilon^*} (\delta N_a \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}, p}^{\text{нст}} \right] d\omega d\mathbf{k}. \quad (57.7)$$

Используя формулу (52.12)<sub>1</sub>, из (57.6), (57.7) находим выражение, которое определяет вклад взаимодействия заряженных частиц с плазмонами в интеграл столкновений для неидеальной плазмы [7, 8]:

$$[I_a]_{\text{пл}} = \frac{e_a^2}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial p} \operatorname{Re} \int_0^\infty \int \frac{k}{k^2} \exp[-\Delta\tau + i(\omega - kv)\tau] \times \\ \times [(\delta\mathbf{E} \delta\mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}, t-\tau/2} \mathbf{k} \frac{\partial f_a(p, t-\tau)}{\partial p} + \\ + \frac{8\pi \operatorname{Im} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} \hat{f}_a(p, t-\tau)] d\tau d\omega d\mathbf{k}. \quad (57.8)$$

В этом выражении следует удерживать лишь члены первого порядка по запаздыванию. В равновесном случае выражение (57.8) обращается в нуль. В этом легко убедиться, если подставить в (57.8) распределение Максвелла для  $f_a$  и выражение (36.4) для спектральной плотности флуктуаций поля.

Выражение (57.8) можно упростить, если учесть, что при малых  $\operatorname{Im} \varepsilon$

$$\frac{\operatorname{Im} \varepsilon}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} \rightarrow \pi \operatorname{sign} \omega \delta(\operatorname{Re} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})). \quad (57.9)$$

Выражение (57.8) надо дополнить уравнением для спектральной плотности  $(\delta\mathbf{E} \delta\mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}}$ , определяющей распределение энергии плазмонов по спектру. Чтобы найти это уравнение, используем уравнение баланса (54.11). Входящее в него выраже-

ние для спектральной плотности  $\text{Re}(\delta j \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, t}$  определяется формулой (54.16) и имеет вид

$$\begin{aligned} \text{Re}(\delta j \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, t} &= \text{Re}(\delta j^{\text{нст}} \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, t} - \\ &- \text{Re} \sum_a \frac{e_a^2 n_a}{k^2} \int_0^\infty \mathbf{k} v \exp[-\Delta \tau + i(\omega - \mathbf{k}v) \tau] \times \\ &\quad \times (\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, t - \tau/2} \mathbf{k} \frac{\partial^2 \epsilon_a(\mathbf{p}, t - \tau)}{\partial \mathbf{p}} d\tau d\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (57.10)$$

Здесь использовано возможное упрощение (57.5).

Рассмотрим первый член правой части (57.10). Подставим в него выражение (54.10) для  $\delta E^*$ , удержим члены первого порядка. В результате получим

$$\text{Re}(\delta j^{\text{нст}} \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, t} = \text{Re} \frac{1}{\epsilon^*} (\delta j \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, t}^{\text{нст}}. \quad (57.11)$$

Отсюда, с учетом выражений (52.12)<sub>2</sub>, (52.12)<sub>3</sub>, находим

$$\text{Re}(\delta j^{\text{нст}} \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, t} = - \frac{\text{Im} \epsilon}{4\pi} \frac{(\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, t}^{\text{нст}}}{|\epsilon(\omega, \mathbf{k})|^2}. \quad (57.12)$$

Во втором члене правой части (57.10) произведем разложение по запаздыванию и удержим члены нулевого и первого порядка. Используя интегралы (54.9) и выражения для действительной и мнимой частей диэлектрической проницаемости

$$\begin{aligned} \text{Re} \epsilon(\omega, \mathbf{k}) &= 1 + \sum_a \frac{4\pi e_a^2 n_a}{k^2} P \int \frac{\mathbf{k} (\partial f_a / \partial \mathbf{p})}{\omega - \mathbf{k}v} d\mathbf{p}, \\ \text{Im} \epsilon(\omega, \mathbf{k}) &= - \sum_a \frac{4\pi^2 e_a^2 n_a}{k^2} \int \delta(\omega - \mathbf{k}v) \mathbf{k} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p}, \end{aligned} \quad (57.13)$$

которые следуют из (35.5), представим второй член в (57.10) в виде

$$\begin{aligned} \text{Im} \omega \epsilon \frac{(\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, t}}{4\pi} - \frac{\partial \omega (\text{Re} \epsilon - 1)}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} \frac{(\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, t}}{8\pi} + \\ + \frac{\partial^2 \omega \text{Re} \epsilon}{\partial t \partial \omega} \frac{(\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, t}}{4\pi}. \end{aligned} \quad (57.14)$$

Используя выражения (57.12), (57.14) и формулу (57.2) для декремента затухания  $\gamma(\mathbf{k})$ , получим следующее уравнение для спектральной плотности плазмонов

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, t} &= -2\gamma(\mathbf{k}) \left[ (\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, t} - \frac{(\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, t}^{\text{нст}}}{|\epsilon(\omega, \mathbf{k}, t)|^2} \right] - \\ &- 2 \frac{\partial^2 \text{Re} \epsilon}{\partial t \partial \omega} \left[ \frac{\partial \text{Re} \epsilon}{\partial \omega} \right]^{-1} (\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, t}. \end{aligned} \quad (57.15)$$

Если при выводе этого уравнения учесть зависимость частоты от времени, которая возникает вследствие зависимости от времени функции  $f_a$  в дисперсионном уравнении (57.2), то в правой части уравнения (57.15) появится дополнительный член

$$-\frac{\partial \omega}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \omega^2} \operatorname{Re} \varepsilon \left[ \frac{\partial \operatorname{Re} \varepsilon}{\partial \omega} \right]^{-1} (\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, t}. \quad (57.16)$$

Соответствующий дополнительный член появится и в интеграле столкновений  $[I_a]_{\text{пл}}$ .

Из (57.15), (57.16) следует, что эффективный декремент затухания спектральной плотности плазмонов определяется выражением

$$\gamma_{\text{эфф}} = \gamma(\mathbf{k}) + \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\partial \operatorname{Re} \varepsilon}{\partial \omega} + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial t} \frac{\partial^2 \operatorname{Re} \varepsilon}{\partial \omega^2} \left[ \frac{\partial \operatorname{Re} \varepsilon}{\partial \omega} \right]^{-1}. \quad (57.17)$$

Кинетическое уравнение с  $[I_a]_{\text{пл}}$  приводит к закону сохранения энергии с учетом вклада плазмонов в энергию поля.

Напомним, что в выражении (57.8) и в уравнении (57.15) учитывается взаимодействие заряженных частиц лишь с теми плазмонами, для которых декремент затухания больше частоты столкновений (см. неравенство (57.3)), но меньше частоты плазменных колебаний.

Выделение вклада плазмонов в кинетическом уравнении имеет смысл лишь при рассмотрении состояний, значительно отличающихся от равновесного состояния. В противном случае вклад плазмонов оказывается малым [43, 44]. Состояния, сильно отличающиеся от равновесного, возникают при наличии внешних полей или иных внешних воздействий, приводящих к появлению и развитию неустойчивостей в плазме.

Рассмотрим для примера неустойчивость, возникающую при прохождении через плазму пучка быстрых электронов (пучковая неустойчивость). Пусть  $u$  — средняя скорость электронов пучка,  $u \gg v_T$  ( $v_T$  — тепловая скорость электронов плазмы). Известно (см., например, [15, 28]), что при  $n_1 \ll n$  ( $n_1$  — концентрация электронов в пучке) инкремент наибольший для волны с  $\omega = \omega_L$  и  $k = \omega_L/u \ll \omega_L/v_T \sim 1/r_D$ . Здесь учтено, что  $u \gg v_T$ .

Оценим величину декремента затухания волны с  $\omega = \omega_L$  и  $k = \omega_L/u$ . Для этого используем выражение (57.2) для  $\gamma(k)$ . Если  $f_e$  — распределение Максвелла, то

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega_L \frac{1}{(r_D k)^3} \exp[-1/(2r_D^2 k^2)]. \quad (57.18)$$

Это декремент затухания Ландау. Подставим в это выражение  $k = \omega_L/u$  и учтем, что  $\omega_L r_D = v_T/\sqrt{2}$ . Тогда

$$\gamma = \sqrt{\pi} (u/v_T)^3 \exp[-(u/v_T)^2]. \quad (57.19)$$

Мы видим, что  $\gamma$  экспоненциально убывает с ростом  $u/v_T$ , поэтому при  $u \gg v_T$  декремент затухания, вычисленный по формуле (57.19), меньше частоты столкновений и, следовательно, условие  $\gamma(\mathbf{k}) > \nu_a$  (см. (57.3)) не выполняется. Это означает, что при расчете спектральных плотностей флуктуаций  $\delta N_a$ ,  $\delta E$  для плазмонов нельзя ограничиться областью частот  $\omega$  и значений  $\mathbf{k}$ , соответствующих приближению бесстолкновительной плазмы. Иными словами, при расчете спектральных плотностей надо принимать во внимание столкновения, которые в свою очередь определяются флуктуациями, но с волновыми числами  $k > 1/r_D$ .

Рассмотрим другой пример.

В неизотермической плазме возможна так называемая ионно-звуковая неустойчивость. Она возникает, когда относительная скорость электронов и ионов превышает скорость ионного звука  $v_s = \sqrt{kT_e/m_i}$ . Из формулы (32.27) для декремента затухания ионно-звуковых волн следует, что  $\gamma(\mathbf{k})$  имеет максимальное значение при  $kr_{De} = 1$ . При этом

$$\gamma_{\max} = \sqrt{\frac{\pi}{8} \frac{m_e}{m_i}} v_s k_{\max} \approx \omega_e \frac{m_e}{m_i}. \quad (57.20)$$

С другой стороны, частота электрон-электронных столкновений (см. (38.9))

$$\nu_{ee} \sim \omega_e \mu, \quad (57.21)$$

где  $\mu$  — плазменный параметр.

Таким образом, при условии

$$m_e/m_i < \mu \quad (57.22)$$

условие  $\gamma(k) > \nu_a$  (см. (57.3)) снова нарушается и, следовательно, расчет спектральных плотностей флуктуаций для области плазмонов надо производить с учетом столкновений.

Рассмотренные примеры показывают, что существуют условия, при которых в интеграл столкновений могут давать заметный вклад спектральные плотности флуктуаций с временами корреляции, превышающими время свободного пробега, и с радиусами корреляции, превышающими длину свободного пробега. При этом подразумевается, что время и длина свободного пробега определяются интегралом столкновений, в котором учтены лишь флуктуации с  $\tau_{\text{кор}} < 1/\nu_a$ ,  $r_{\text{кор}} < l_a$ .

Из сказанного следует, что существует необходимость построения для плазмы кинетических уравнений с учетом долгоживущих (с  $\tau_{\text{кор}} > 1/\nu_a$ ) и крупномасштабных (с  $r_{\text{кор}} > l$ ) флуктуаций. Этой проблеме посвящена гл. 11, в которой изложена кинетическая теория флуктуаций в плазме.

**ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНАЯ  
НЕИДЕАЛЬНАЯ ПЛАЗМА**

**§ 58. Связь интеграла столкновений со спектральной  
плотностью флуктуаций**

Используем выражение для интеграла столкновений

$$I_a(x, t) = -\frac{e_a}{n_a} \frac{\partial (\overline{\delta N_a \delta E})_{x, r, t}}{\partial p}. \quad (58.1)$$

Для кулоновской плазмы, выражая  $\delta E$  через  $\delta N_b$ , с помощью уравнения Пуассона можно записать это выражение в виде

$$I_a(x, t) = \frac{e_a}{n_a} \sum_b e_b \frac{\partial}{\partial p} \int \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{|r - r'|} (\overline{\delta N_a \delta N_b})_{x, x', t} dx'. \quad (58.2)$$

В пространственно однородной плазме функция  $(\overline{\delta N_a \delta N_b})_{x, x', t}$  зависит лишь от разности координат  $r - r'$ . В пространственно неоднородной плазме введем, как и в § 15, вместо  $r, r'$  переменные  $r - r' = r_{ab}$ ,  $(r + r')/2 = r - r_{ab}/2$  и произведем разложение по  $r_{ab} \partial / \partial r$ . В первом приближении получим

$$(\overline{\delta N_a \delta N_b})_{r, p, r', p', t} = \left(1 - \frac{r_{ab}}{2} \frac{\partial}{\partial r}\right) (\overline{\delta N_a \delta N_b})_{r_{ab}, r, p, p', t}. \quad (58.3)$$

Это выражение аналогично (15.2).

Подставим выражение (58.3) в (58.2) и произведем под интегралом замену  $r - r' = r_{ab}$ . В результате получим

$$I_a(r, p, t) = \frac{e_a}{n_a} \sum_b e_b \frac{\partial}{\partial p} \int \frac{\partial}{\partial r_{ab}} \frac{1}{|r_{ab}|} \times \\ \times \left(1 - \frac{r_{ab}}{2} \frac{\partial}{\partial r}\right) (\overline{\delta N_a \delta N_b})_{r_{ab}, r, p, p', t} dr_{ab} dp'. \quad (58.4)$$



Произведем здесь разложение в интеграл Фурье по  $r_{ab}$ . Используем формулы

$$\begin{aligned} \frac{1}{|r|} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{4\pi}{k^2} e^{ikr} dk, \\ \frac{r_i}{2} \frac{\partial}{\partial r_j} \frac{1}{|r|} &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{4\pi}{k^2} \left[ \frac{\delta_{ij}}{2} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right] e^{ikr} dk. \end{aligned} \quad (58.5)$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{1}{n_a (2\pi)^3} \sum_b e_a e_b \frac{\partial}{\partial p_i} \int \text{Re} \frac{4\pi}{k^2} \left[ -ik_i + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\delta_{ij}}{2} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \frac{\partial}{\partial r_j} \right] (\delta N_a \delta N_b)_{k, r, p, p', t} dk dp'. \end{aligned} \quad (58.6)$$

Используя равенство

$$(\delta N_a \delta E)_{k, p, t} = \frac{ik}{k^2} \sum_b 4\pi e_b \int (\delta N_a \delta N_b)_{k, p, p', t} dp',$$

выразим интеграл столкновений (58.6) через спектральную плотность флуктуаций  $\delta N_a$ ,  $\delta E$ :

$$\begin{aligned} I_a(r, p, t) &= -\frac{e_a}{n_a} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial p} \int \text{Re} (\delta N_a \delta E)_{k, r, p, t} dk + \\ &+ \frac{e_a}{n_a} \frac{\partial}{\partial p_i} \int \left( \frac{\delta_{ij}}{2} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial r_j} \text{Im} (\delta N_a (k \delta E))_{k, r, p, t} dk. \end{aligned} \quad (58.7)$$

Мы видим, что по сравнению с интегралом столкновений для однородной плазмы здесь появился дополнительный член, который определяется мнимой частью спектральной плотности  $(\delta N_a \delta E)_{k, p, t}$  [8].

Чтобы найти явный вид интеграла столкновений, надо выразить спектральную плотность  $(\delta N_a \delta E)_{k, p, t}$  через функции  $f_a$  с учетом временного запаздывания и пространственной неоднородности, т. е. найти решение, аналогичное (15.4). Это мы сделаем в следующем параграфе. Здесь же лишь отметим, что, как и в § 15 для неидеального газа, интеграл столкновений можно представить в виде суммы трех частей

$$I_a(r, p, t) = I_{a1} + I_{a2} + I_{a3}. \quad (58.8)$$

В следующем параграфе мы найдем для них явные выражения, основываясь на модели, которая была использована в §§ 55, 56.

### § 59. Интеграл столкновений

Чтобы одновременно учесть вклад взаимодействия заряженных частиц на малых расстояниях и поляризационные эффекты, используем уравнения (56.11), (56.12), но с учетом пространственной неоднородности. Эти уравнения можно записать по аналогии с уравнениями (2.11), (2.18) для газа:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + e_a (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right) f_a = \sum_b n_b \int \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} g_{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' \equiv I_a, \quad (59.1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{v}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} - \frac{\partial \tilde{\Phi}_{ab}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \tilde{\Phi}_{ab}}{\partial \mathbf{r}'} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'}\right) f_{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{v}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'}\right) f_a(\mathbf{x}, t) f_b(\mathbf{x}', t). \quad (59.2)$$

Напомним, что функция  $\overline{(\delta N_a \delta N_b)}$  в (58.2) связана с корреляционной функцией  $g_{ab}$  соотношением

$$\overline{(\delta N_a \delta N_b)}_{\mathbf{x}, \mathbf{x}', t} = n_a n_b g_{ab} + \delta_{ab} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') f_a n_a. \quad (59.3)$$

Член с  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  не дает вклада в интеграл столкновений, поэтому выражения (58.2), (59.1) для интеграла столкновений эквивалентны.

В уравнении (59.2)  $\tilde{\Phi}_{ab}$  — эффективный потенциал, учитывающий усредненный вклад динамической поляризации плазмы. Используем для него выражение (55.1). Действием среднего поля в уравнении (59.2) пренебрегаем. При частотах поля  $\omega_0 \ll \omega_L$  это возможно, если  $eEr_D \ll \kappa T$  (см. § 46).

Решение уравнения (59.2) в первом приближении по  $\tau \partial / \partial t$ ,  $r_{ab} \partial / \partial r$  и при условии полного ослабления начальных корреляций можно по аналогии с (15.4) записать в виде

$$f_{ab}(\mathbf{r}_{ab}, \mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{p}', t) = f_a(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{P}}(-\infty), t) f_b(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{P}}'(-\infty), t) - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{v} + \mathbf{v}'}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \int_0^\infty \tau \frac{d}{d\tau} f_a(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{P}}(-\tau), t) \tilde{f}_b(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{P}}'(-\tau), t) d\tau. \quad (59.4)$$

Здесь  $\tilde{\mathbf{P}}(-\tau)$ ,  $\tilde{\mathbf{P}}'(-\tau)$  — начальные импульсы двух частиц, взаимодействующих по закону  $\tilde{\Phi}_{ab}$ .

Для пространственно однородной плазмы выражение (59.4) совпадает с (56.13).

Интеграл столкновений определяется функцией  $g_{ab} = f_{ab} - f_a f_b$ . Выражение для корреляционной функции по аналогии с

(58.3) можно записать в виде

$$g_{ab}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{r}', \mathbf{p}', t) = \left(1 - \frac{r_{ab}}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) g_{ab}(\mathbf{r}_{ab}, \mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{p}', t). \quad (59.5)$$

Функция

$$g_{ab}(\mathbf{r}_{ab}, \mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{p}', t) = f_{ab}(\mathbf{r}_{ab}, \mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{p}', t) - f_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f_b(\mathbf{r}, \mathbf{p}', t) \quad (59.6)$$

и, следовательно, определяется выражением (59.4).

Из выражений (59.1), (59.6), (59.4) следует, что интеграл столкновений  $I_a$  может быть представлен в виде суммы трех частей (58.8), которые определяются формулами, аналогичными формулам (15.6), (15.7), (15.8) для газа:

$$I_{a1} = \sum_b n_b \int \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f_a(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{P}}(-\infty), t) f_b(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{P}}'(-\infty), t) d\mathbf{r}' d\mathbf{p}', \quad (59.7)$$

$$I_{a2} = - \sum_b n_b \int_0^\infty \int \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{(\mathbf{v} + \mathbf{v}')}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \times \\ \times \tau \frac{d}{d\tau} f_a(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{P}}(-\tau), t) f_b(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{P}}'(-\tau), t) d\tau d\mathbf{r}' d\mathbf{p}', \quad (59.8)$$

$$I_{a3} = - \sum_b \frac{n_b}{2} \int \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left( \mathbf{r}_{ab} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) [f_a(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{P}}(-\infty), t) f_b \times \\ \times (\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{P}}'(-\infty), t) - f_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f_b(\mathbf{r}, \mathbf{p}', t)] d\mathbf{r}' d\mathbf{p}'. \quad (59.9)$$

Сравним эти выражения с соответствующими выражениями для пространственно однородной неидеальной плазмы.

Формула (59.7) отличается от (56.15) зависимостью функций  $f_a, f_b$  от координаты  $\mathbf{r}$ . Выражение (59.8) отличается от (56.16) заменой оператора  $\partial/\partial t$  на  $\partial/\partial t + 1/2(\mathbf{v} + \mathbf{v}')(\partial/\partial \mathbf{r})$ . Выражение (59.8) для пространственно однородного распределения обращается в нуль.

Как и в (15.8), второй член в [ ] в (59.9) компенсируется соответствующим вкладом в члене со средним полем  $E$  в левой части уравнения (59.1). Это учитывается ниже.

## § 60. Свойства интеграла столкновений

Для интеграла столкновений (58.8), (59.7) — (59.9) равенство (56.17) имеет место лишь при  $\varphi_a = 1$ . При  $\varphi_a = p$  равенство (56.17) выполняется только для первых двух частей интеграла столкновений  $I_a$ . Для  $I_{a3}$  из (59.9) следует, что

$$\sum_a n_a \int p_i I_{a3} d\mathbf{p} = - \sum_a \frac{\partial \Delta P_{ii}^a}{\partial r_i}, \quad (60.1)$$

где  $\Delta P_{ij}^a$  — вклад в тензор  $P_{ij}^a$ , обусловленный взаимодействием частиц плазмы. Он определяется выражением

$$\Delta P_{ij}^a = - \sum_b \frac{n_a n_b}{2} \int \frac{(r_{ab} r_{ab})_{ij}}{r_{ab}} \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial r_{ab}} \times \\ \times f_a(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{P}}(-\infty), t) f_b(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{P}}'(-\infty), t) d\mathbf{r}_{ab} d\mathbf{p} d\mathbf{p}', \quad (60.2)$$

аналогичным выражению (15.13) для газа. Соответствующий вклад в давление определяется выражением

$$\Delta p_a = 1/3 \Delta P_{ii}^a. \quad (60.3)$$

В приближении локального равновесия (при  $T_a = T$ ) из (60.2), (60.3) следует выражение

$$\Delta p_a = - \sum_b \frac{2\pi n_a n_b}{3} \int_0^\infty r \Phi'_{ab} e^{-\tilde{\Phi}_{ab}/\kappa T} r^2 dr, \quad (60.4)$$

где  $\tilde{\Phi}_{ab} = \frac{e_a e_b}{r} e^{-r/r_D}$ .

Отсюда в дебаевском приближении с учетом  $\sum_a e_a n_a = 0$

$$\Delta p_a = \sum_b \frac{2\pi n_a n_b}{3\kappa T} \int_0^\infty \Phi'_{ab} \tilde{\Phi}_{ab} r^3 dr = - \frac{e_a^2 n_a}{6r_D} \quad (60.5)$$

и, следовательно, суммарный вклад взаимодействия заряженных частиц в давление определяется выражением

$$\Delta p = \sum_a \Delta p_a = - \sum_a \frac{e_a^2 n_a}{6r_D} = - \frac{\sqrt{\pi}}{3\sqrt{\kappa T}} \left( \sum_a e_a^2 n_a \right)^{1/2}, \quad (60.6)$$

которое совпадает с известным выражением теории Дебая (см. (75.15) в книге [45]).

При  $\varphi_a = p^2/2m_a$  равенство (56.17) справедливо лишь для  $I_{a1}$ . Для  $I_{a2}$  из (59.8) находим

$$\sum_a n_a \int \frac{p^2}{2m_a} I_{a2} d\mathbf{p} = - \sum_{ab} \frac{n_a n_b}{2} \Phi_{ab} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{v+v'}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \times \\ \times f_a(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{P}}(-\infty), t) f_b(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{P}}'(-\infty), t) d\mathbf{r}_{ab} d\mathbf{p} d\mathbf{p}'. \quad (60.7)$$

Это выражение аналогично (15.21).

Наконец, вклад  $I_{a3}$  определяется выражением

$$\sum_a n_a \int \frac{p^2}{2m_a} I_{a3} dp = \sum_{ab} \frac{n_a n_b}{4} \frac{\partial}{\partial r_j} \int (v + v')_i \frac{(r_{ab} \cdot r_{ab})_{ij}}{2} \Phi'_{ab}(r_{ab}) \times \\ \times f_{ab}(r, \tilde{\mathbf{P}}(-\infty), t) f_b(r, \tilde{\mathbf{P}}'(-\infty), t) dr_{ab} dp dp', \quad (60.8)$$

аналогичным (15.25).

В приближении локального равновесия из выражений (60.7), (60.8) находим

$$\sum_a n_a \int \frac{p^2}{2m_a} (I_{a2} + I_{a3}) dp = - \sum_a \left( \frac{\partial \Delta U_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} u (\Delta U_a + \Delta p_a) \right). \quad (60.9)$$

Здесь

$$\Delta U_a = \sum_b 2\pi n_a n_b \int_0^\infty \Phi_{ab} e^{-\tilde{\Phi}_{ab}/\kappa T} r^2 dr \quad (60.10)$$

— вклад в плотность внутренней энергии компоненты  $a$ , обусловленный корреляцией заряженных частиц,  $\Delta p_a$  определяется выражением (60.4).

В дебаевском приближении выражение (60.10) принимает вид

$$\Delta U_a = - \sum_b \frac{2\pi n_a n_b}{\kappa T} \int_0^\infty \Phi_{ab} \tilde{\Phi}_{ab} r^2 dr = - \frac{e_a^2 n_a}{2r_D}. \quad (60.11)$$

Суммарный вклад взаимодействия частиц в плотность внутренней энергии определяется выражением

$$\Delta U = \sum_a \Delta U_a = - \sum_a \frac{e_a^2 n_a}{2r_D} = - \sqrt{\frac{\pi}{\kappa T}} \left( \sum_a e_a^2 n_a \right)^{1/2}, \quad (60.12)$$

совпадающим с известным выражением теории Дебая (см. (75.11) в [45]).

Таким образом, на основе кинетического уравнения для идеальной плазмы с интегралом столкновений (58.8), (59.7)—(59.9) можно получить уравнения газовой динамики для идеальной плазмы, т. е. уравнения с учетом вкладов корреляции заряженных частиц в термодинамические функции.

Естественно, что вклад взаимодействия заряженных частиц в термодинамические функции определяется не только корреляционными функциями, но и одночастичными функциями, так как двухчастичная функция, определяющая полный вклад в термодинамические функции, имеет вид  $f_{ab} = g_{ab} + f_{ab}$ .

В кинетическом уравнении (59.1) вклад взаимодействия заряженных частиц разделен на две части. Вклад, определяемый корреляционными функциями  $g_{ab}$ , включен в интеграл столкновений, а вклад, определяемый функциями  $f_a, f_b$ , включен в член

$$e_a \mathbf{E} \frac{\partial f_a}{\partial p} = - \sum_b n_b \int \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial p} f_a(x, t) f_b(x', t) dx', \quad (60.13)$$

$$\Phi_{ab} = \frac{e_a e_b}{r_{ab}}.$$

Здесь  $\mathbf{E}$  — среднее электрическое поле, создаваемое заряженными частицами, распределение которых задается одночастичной функцией распределения  $f_a$ .

Такое разделение вклада взаимодействия в кинетическом уравнении на две части во многих случаях очень удобно. Оно не является, однако, абсолютным, так как зависит от соотношения времен релаксации функций распределения и поля. Это соотношение в свою очередь зависит от близости рассматриваемого состояния к состоянию равновесия.

Действительно, в газодинамическом режиме изменение функций распределения  $f_a$  определяется изменением газодинамических функций  $n_a, u_a, T_a$ , для которых характерные времена изменения  $\tau_a^r$  («г» — гидродинамическое)

$$\tau_a^r \sim \tau_a \frac{L^2}{l_a^2} \gg \tau_a, \quad \text{так как } L \gg l_a. \quad (60.14)$$

Здесь  $L$  — характерный параметр длины для гидродинамического процесса,  $\tau_a, l_a$  — время и длина свободного пробега частицы компоненты  $a$ . Неравенство  $L \gg l_a$  — условие, при котором справедливо газодинамическое описание.

Таким образом, если при кинетическом описании среднее электрическое поле — поле с временем релаксации, большим  $\tau_a$ , то при газодинамическом описании среднее поле — поле с временем релаксации, большим  $\tau_a^r \gg \tau_a$ .

Вследствие этого, по мере приближения к равновесному состоянию, интеграл столкновений должен учитывать вклады флуктуаций со все большими и большими временами корреляции. Естественно, что при этом меняется доля вклада взаимодействия частиц, которая определяется членом (60.13). В следующей главе, посвященной кинетической теории флуктуаций, эти вопросы будут рассмотрены более подробно.

В заключение настоящего параграфа заметим, что в соответствии с изложенным в §§ 26, 58 вклады в термодинамические функции, обусловленные корреляцией частиц, могут быть выражены через корреляции флуктуаций  $\delta N_a, \delta \mathbf{E}$ . Так, например, из

выражения (58.4) следует, что интеграл столкновений  $I_{a3}$  можно представить в виде

$$I_{a3} = -\frac{e_a}{2n_a} \sum_b e_b \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_{ab}} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_{ab}|} \right) \left( \mathbf{r}_{ab} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \times \\ \times \overline{(\delta N_a \delta N_b)}_{\mathbf{r}_{ab}, \mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{p}', t} d\mathbf{r}_{ab} d\mathbf{p}'. \quad (60.15)$$

Отсюда для корреляционного вклада (60.1)

$$\sum_a \Delta P_{ij}^a = -\sum_{ab} \frac{1}{2} \int \frac{(\mathbf{r}_{ab} \mathbf{r}_{ab})_{ij}}{r_{ab}} \Phi'(\mathbf{r}_{ab}) \overline{(\delta n_a \delta n_b)}_{\mathbf{r}_{ab}, \mathbf{r}} d\mathbf{r}_{ab}, \quad (60.16)$$

где

$$\overline{(\delta n_a \delta n_b)}_{\mathbf{r}_{ab}, \mathbf{r}, t} = \delta_{ab} \delta(\mathbf{r}_{ab}) n_a(\mathbf{r}, t) + n_a n_b g_{ab}(\mathbf{r}_{ab}, \mathbf{r}, t) \quad (60.17)$$

— корреляция флуктуаций плотности частиц компонент  $a, b$ . Из (59.4) следует, что эта корреляция определяется выражением

$$\overline{(\delta n_a \delta n_b)}_{\mathbf{r}_{ab}, \mathbf{r}, t} = \delta_{ab} \delta(\mathbf{r}_{ab}) n_a(\mathbf{r}, t) + \\ + n_a n_b \int [f_a(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{P}}(-\infty), t) f_b(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{P}}'(-\infty), t) - \\ - f_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f_b(\mathbf{r}, \mathbf{p}', t)] d\mathbf{p} d\mathbf{p}'. \quad (60.18)$$

Для состояния локального равновесия это выражение принимает вид

$$\overline{(\delta n_a \delta n_b)}_{\mathbf{r}_{ab}, \mathbf{r}, t} = \delta_{ab} \delta(\mathbf{r}_{ab}) n_a(\mathbf{r}, t) + n_a n_b (e^{-\Phi_{ab}/kT} - 1) \quad (60.19)$$

Вклад корреляций во внутреннюю энергию определяется выражением

$$\Delta U(\mathbf{r}, t) = \sum_{ab} \frac{1}{2} \int \Phi_{ab} \overline{(\delta n_a \delta n_b)}_{\mathbf{r}_{ab}, \mathbf{r}, t} d\mathbf{r}_{ab}. \quad (60.20)$$

Оно отличается от выражения, которое следует из (60.7), лишь тем, что здесь учтено самовоздействие.

## КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФЛУКТУАЦИЙ В ПЛАЗМЕ

## § 61. Уравнения для сглаженной фазовой плотности и поля

При построении кинетической теории флуктуаций в газах (гл. 4) были использованы два подхода. Один был основан на цепочке уравнений для сглаженных функций распределения  $f_1, f_2, \dots$ . Она отличается от цепочки уравнений Боголюбова тем, что в ней с самого начала учитывается диссипация, обусловленная парными столкновениями. Другой подход основан на уравнении (22.1) для сглаженной фазовой плотности в шестимерном пространстве координат и импульсов.

Мы видели, что оба подхода эквивалентны. Однако использование метода фазовой плотности позволяет существенно упростить расчет спектральных плотностей крупномасштабных флуктуаций, поэтому он будет использоваться и при построении кинетической теории флуктуаций в плазме.

В кинетической теории флуктуаций рассматриваются крупномасштабные и долгоживущие флуктуации, т. е. такие, длина и время корреляции которых много больше величин  $l_\phi, \tau_\phi$  — физически бесконечно малых элементов кинетической теории.

Для плазмы  $l_\phi \sim r_D, \tau_\phi \sim 1/\omega_L$  (см. § 33), поэтому в кинетической теории рассматриваются флуктуации, для которых

$$\tau_{\text{кор}} > 1/\omega_L, \quad r_{\text{кор}} > r_D. \quad (61.1)$$

Мелкомасштабные флуктуации с  $\tau_{\text{кор}} \leq 1/\omega_L, r_{\text{кор}} \leq r_D$  определяют сам интеграл столкновений.

В кинетической теории газов уравнение (22.1) для сглаженной фазовой плотности записано на основе кинетического уравнения Больцмана и совпадает с ним при усреднении в приближении первых моментов, когда не учитываются корреляции.

В плазме в зависимости от выбранного приближения уравнение для сглаженной фазовой плотности можно записать на основе различных кинетических уравнений: уравнения Ландау,



уравнения Балеску — Ленарда, уравнения Больцмана (§§ 56, 59) с учетом поляризации плазмы.

Будем использовать уравнение Больцмана (56.11) с интегралом столкновений (56.15) или (с учетом запаздывания и неоднородности) с интегралом (58.8), (59.7)—(59.9). В этих интегралах столкновений учтены и сильные взаимодействия на малых расстояниях и эффекты поляризации.

Запишем соответствующее уравнение для сглаженной фазовой плотности  $\tilde{N}_a(x, t)$ . Ниже знак  $\sim$  над  $N_a$  будем опускать там, где это не будет приводить к недоразумениям. Запишем сначала уравнение для идеальной плазмы, а затем проведем соответствующее обобщение. Уравнение для идеальной плазмы имеет вид

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} + F_{a0} \frac{\partial}{\partial p} \right) N_a(x, t) = \\ = \sum_b \int \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial p} [N_a(x, t) N_b(x', t) + \\ + N_a(r, \tilde{P}(-\infty), t) N_b(r, \tilde{P}'(-\infty), t)] dx'. \quad (61.2) \end{aligned}$$

Здесь, как и в (56.13),  $\tilde{P}(-\tau)$ ,  $\tilde{P}'(-\tau)$  — начальные (в момент  $t - \tau$ ) импульсы двух частиц, взаимодействующих по закону  $\tilde{\Phi}_{ab}$ ,  $\Phi_{ab}$  — кулоновский потенциал.

Второй член в правой части уравнения (61.2) учитывает сильные парные взаимодействия заряженных частиц на малых расстояниях и, через эффективный потенциал, коллективные взаимодействия. В нем, однако, не учтено запаздывание и пространственная неоднородность функций распределения. Для неидеальной плазмы в первом приближении по запаздыванию и неоднородности его следует записать в виде (ср. с (22.3))

$$\begin{aligned} \sum_b \int \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \left( 1 - \frac{r_{ab}}{2} \frac{\partial}{\partial r} \right) [N_a(r, \tilde{P}(-\infty), t) N_b(r, \tilde{P}'(-\infty), t) - \right. \\ \left. - N_a(r, p, t) N_b(r, p', t)] - \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{v+v'}{2} \frac{\partial}{\partial r} + F_{a0} \frac{\partial}{\partial p} \right) \times \right. \\ \left. \times \int_0^\infty \tau \frac{d}{d\tau} N_a(r, \tilde{P}(-\tau), t) N_b(r, \tilde{P}'(-\tau), t) d\tau \right\} dx'. \quad (61.3) \end{aligned}$$

Уравнения (61.2), (61.3), как уже говорилось, учитывают коллективные эффекты, поэтому в них нельзя перейти к бальмановской форме.

Для дальнейшего полезна другая форма записи уравнения (61.2):

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} + (e_a \tilde{E} + F_{a0}) \frac{\partial}{\partial p} \right) N_a(x, t) = \\ = \sum_b \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial p} N_a(r, \tilde{P}(-\infty), t) N_b(r, \tilde{P}'(-\infty), t) dx'. \end{aligned} \quad (61.4)$$

Введенная здесь напряженность электрического поля  $\tilde{E}(r, t)$  для кулоновской плазмы определяется уравнениями

$$\text{rot } \tilde{E} = 0, \quad \text{div } \tilde{E} = \sum_a 4\pi e_a \int N_a(r, p, t) dp \quad (61.5)$$

или, если вместо уравнения Пуассона использовать уравнение полного тока, уравнениями

$$\text{rot } \tilde{E} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} = -4\pi \sum_a e_a \int v N_a(r, p, t) dp. \quad (61.6)$$

Знак  $\sim$  над  $E$  подчеркивает, что источником в (61.5), (61.6) является сглаженная фазовая плотность.

Сравним уравнения (61.4), (61.5) с уравнениями (25.1), (25.2) для микроскопической фазовой плотности  $N_a(x, t)$  и микроскопической напряженности электрического поля  $E^m(r, t)$ .

Уравнения (25.1), (25.2) для кулоновской плазмы являются точными микроскопическими уравнениями. В уравнениях же (61.4), (61.5) уже учтен вклад мелкомасштабных корреляций. Он определяет правую часть уравнения (61.4). Уравнения (61.4), (61.5) являются поэтому менее общими. Они описывают лишь крупномасштабные флуктуации (с  $r_{\text{кор}} > r_D$  и  $\tau_{\text{кор}} > 1/\omega_L$ ).

Запись исходных уравнений в форме (61.4), (61.5) удобна, в частности, тем, что позволяет провести обобщение на случай релятивистской плазмы. Для этого в уравнении (61.4) надо

$$e_a \tilde{E} + F_{a0} \rightarrow e_a \left( \tilde{E} + \frac{1}{c} [v \tilde{B}] \right) + F_{a0}, \quad (61.7)$$

правую часть заменить релятивистским интегралом столкновений и вместо уравнений (61.5) использовать уравнения Максвелла для сглаженных напряженностей электрического и магнитного полей  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{B}$ .

## § 62. Метод моментов. Поляризационное приближение

На основе уравнения (61.3) или уравнений (61.4), (61.5) можно, как и в § 22, построить цепочку уравнений для моментов случайных функций  $\tilde{N}_a$ ,  $\tilde{E}$ . Рассмотрим первое уравнение этой цепочки.

Используем определение одночастичной функции распределения  $f_a$  и среднего поля через сглаженные функции  $\tilde{N}_a$ ,  $\tilde{\mathbf{E}}$  (ср. с (26.1)):

$$n_a f_a = \tilde{N}_a, \quad \mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}, \quad (62.1)$$

и тождество

$$\overline{\tilde{N}_a(x, t) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)} = n_a f_a \mathbf{E} + \overline{(\delta \tilde{N}_a \delta \tilde{\mathbf{E}})_{x, r, t}}, \quad (62.2)$$

где  $\delta \tilde{N}_a = \tilde{N}_a - n_a f_a$ ,  $\delta \tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}} - \mathbf{E}$ . Тогда после усреднения из (61.4), (61.5) получим уравнения для функций  $f_a$ ,  $\mathbf{E}$ . Запишем эти уравнения в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + (e_a \mathbf{E} + \mathbf{F}_{a0}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) f_a = I_a^B + \tilde{I}_a, \quad (62.3)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = \sum_a 4\pi e_a n_a \int f_a d\mathbf{p}.$$

Здесь использованы обозначения

$$I_a^B(x, t) = \sum_b n_b \int \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f_a(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{P}}(-\infty), t) f_b(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{P}}'(-\infty), t) dx \quad (62.4)$$

для части интеграла столкновений, определяемой мелкомасштабными флуктуациями, и

$$\tilde{I}_a = - \frac{e_a}{n_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \overline{(\delta \tilde{N}_a \delta \tilde{\mathbf{E}})_{x, r, t}} \quad (62.5)$$

для части интеграла столкновений, определяемой крупномасштабными флуктуациями (ср. с (22.9)).

В (62.4) опущен член с функцией  $\tilde{g}_2(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{P}}(-\infty), \tilde{\mathbf{P}}'(-\infty), t)$ , так как вклад крупномасштабных флуктуаций на малых расстояниях ( $r < r_D$ ) мал.

Чтобы подчеркнуть аналогию с кинетической теорией газов, мы будем называть интеграл  $I_a^B$  интегралом столкновений Больцмана. Это не вполне последовательно, так как в  $I_a^B$  учтены не только парные, но и (через эффективный потенциал) коллективные взаимодействия заряженных частиц.

Система уравнений (62.3) не является замкнутой, так как в нее кроме функций  $f_a$ ,  $\mathbf{E}$  входит второй момент  $\delta \tilde{N}_a \delta \tilde{\mathbf{E}}$ .

В уравнение для второго момента входит третий момент и т. д., возникает цепочка уравнений, аналогичная цепочке уравнений для сглаженных функций распределения  $f_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3, \dots$  (см. §§ 21, 22).

Рассмотрим, как и в § 22, уравнения для моментов в поляризационном приближении. Поскольку выкладки аналогичны проведенным в § 22, то приводим окончательное уравнение.

Уравнение для одновременного момента  $(\overline{\delta N_a \delta N_b})_{x, x', t}$  (опускаем, как и выше, знак  $\sim$  над  $\delta N_a, \delta N_b$ ) аналогично уравнению (22.21) и может быть записано в виде

$$\begin{aligned} & (\widehat{L}_{ab} + \delta \widehat{I}_{ax} + \delta \widehat{I}_{bx'}) (\overline{\delta N_a \delta N_b})_{x, x', t} + e_a (\overline{\delta \mathbf{E} \delta N_b})_{r, x', t} \frac{\partial n_a f_a}{\partial \mathbf{p}} + \\ & + e_b (\delta N_a \delta \mathbf{E})_{x, r', t} \frac{\partial n_b f_b}{\partial \mathbf{p}} = A_{ab}(x, x', t). \end{aligned} \quad (62.6)$$

Здесь функция

$$\begin{aligned} A_{ab}(x, x', t) = & (\widehat{L}_{ab} + \delta \widehat{I}_{ax} + \delta \widehat{I}_{bx'}) n_a \delta_{ab} \left( \delta(x - x') f_a - \frac{1}{V} f_a f_b \right) + \\ & + n_a n_b \left[ \overline{\widehat{\theta}_{ab} f_a(\tilde{\mathbf{P}}, t) f_b(\tilde{\mathbf{P}}', t)} - \frac{1}{V} (I_a^B(x, t) f_b(x', t) + \right. \\ & \left. + I_b^B(x', t) f_a(x, t)) \right] \end{aligned} \quad (62.7)$$

определяется одночастичными функциями распределения  $f_a$  и может рассматриваться поэтому как источник (ср. с (22.22)). Операторы  $\widehat{L}_{ab}, \widehat{\theta}_{ab}$  определяются выражениями (26.4), (27.5);  $\tilde{\mathbf{P}} \equiv \tilde{\mathbf{P}}(-\infty), \tilde{\mathbf{P}}' \equiv \tilde{\mathbf{P}}'(-\infty)$ ; интеграл  $I_a^B$  определяется выражением (62.4); действие операторов  $\delta \widehat{I}_{ax}, \delta \widehat{I}_{bx}$  на произвольную функцию  $F_a(x, t)$  определяется выражением (ср. с (22.37))

$$\begin{aligned} \delta \widehat{I}_{ax} F_a(x, t) = & - \sum_c n_c \int \widehat{\theta}_{ac} [f_a(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{P}}, t) F_c(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{P}}'', t) + \\ & + F_a(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{P}}, t) f_c(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{P}}'', t)] dx''. \end{aligned} \quad (62.8)$$

Уравнение для двухвременного момента  $(\overline{\delta N_a \delta N_b})_{x, t, x', t'}$  в поляризационном приближении аналогично уравнению (22.40) и может быть записано в виде

$$\begin{aligned} & (\widehat{L}_a + \delta \widehat{I}_{ax}) (\overline{\delta N_a \delta N_b})_{x, t, x', t'} + \\ & + e_a (\overline{\delta \mathbf{E} \delta N_b})_{r, t, x', t'} \frac{\partial n_a f_a(x, t)}{\partial \mathbf{p}} = 0. \end{aligned} \quad (62.9)$$

Решение этого уравнения выражается через одновременной момент  $(\overline{\delta N_a \delta N_b})_{x, x', t}$  (начальное условие для уравнения (62.9)). Вследствие этого для определения пространственно-временной спектральной плотности крупномасштабных флуктуаций  $\delta \overline{N_a}, \delta \overline{\mathbf{E}}$  надо знать решение уравнения (62.6). В § 22 мы видели, что этого можно избежать, если для определения корреляций использовать уравнение для  $\delta N_a$ , эквивалентное системе уравне-

ний (62.6), (62.9). Оно аналогично уравнению (22.41) и может быть записано в виде

$$(\hat{L}_a + \delta\hat{I}_{ax})(\delta N_a(x, t) - \delta N_a^{\text{ист}}(x, t)) + e_a \delta \mathbf{E}(r, t) \frac{\partial n_a^{\text{ист}}}{\partial p} = 0, \\ \text{rot } \delta \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \delta \mathbf{E} = 4\pi \sum_a e_a \int \delta N_a dp. \quad (62.10)$$

Знак  $\sim$  над  $\delta N_a$ ,  $\delta \mathbf{E}$  здесь опущен.

Корреляция флуктуаций  $\delta N_a^{\text{ист}}$  определяется уравнением, аналогичным уравнению (22.42):

$$(\hat{L}_a + \delta\hat{I}_{ax})(\overline{\delta N_a \delta N_b})_{x, t, x', t'}^{\text{ист}} = 0. \quad (62.11)$$

Это уравнение следует решать при начальном условии

$$(\overline{\delta N_a \delta N_b})_{x, t, x', t'}^{\text{ист}} \Big|_{t=t'} = (\overline{\delta N_a \delta N_b})_{x, x', t}^{\text{ист}}$$

Функция  $(\overline{\delta N_a \delta N_b})_{x, x', t}^{\text{ист}}$  в свою очередь определяется уравнением (ср. с (22.43))

$$(\hat{L}_{ab} + \delta\hat{I}_{ax} + \delta\hat{I}_{bx'}) \overline{\delta N_a \delta N_b}_{x, x', t}^{\text{ист}} = A_{ab}(x, x', t). \quad (62.12)$$

Функция  $A_{ab}(x, x', t)$  связана с одночастичными функциями распределения формулой (62.7).

Это уравнение существенно проще (62.6), так как не содержит поляризационных членов, пропорциональных функциям  $\delta \mathbf{E} \delta N_b$ ,  $\delta N_a \delta \mathbf{E}$ .

В приближении локального равновесия члены в [ ] в (62.7) обращаются в нуль. Тогда из (62.12), (62.7) следует, что начальное условие для уравнения (62.11) можно записать в виде

$$(\overline{\delta N_a \delta N_b})_{x, x', t}^{\text{ист}} = n_a \delta_{ab} \left[ \delta(x - x') f_a - \frac{1}{V} f_a(x, t) f_b(x', t) \right]. \quad (62.13)$$

Рассмотрим приближение, когда не учитывается поляризация, обусловленная крупномасштабными флуктуациями  $\delta \mathbf{E}$ . В этом приближении в уравнении (62.6) выпадают члены с  $\delta \mathbf{E} \delta N_b$ ,  $\delta N_a \delta \mathbf{E}$  и уравнения (62.6), (62.12) совпадают. Вследствие этого

$$\overline{\delta N_a \delta N_b}_{x, x', t} = \overline{\delta N_a \delta N_b}_{x, x', t}^{\text{ист}} \quad (62.14)$$

Это показывает, что при пренебрежении флуктуациями  $\delta \mathbf{E}$  корреляция флуктуаций  $\delta N_a$ ,  $\delta N_b$  совпадает с корреляцией флуктуаций источника.

В том же приближении в уравнении (62.10) можно опустить член с  $\delta E$ . Тогда  $\delta N_a = \delta N_a^{\text{нст}}$  и, следовательно, для двухвременных корреляций имеет место равенство

$$\overline{(\delta N_a \delta N_b)_{x, t, x', t'}} = \overline{(\delta N_a \delta N_b)_{x, t, x', t'}^{\text{нст}}} \quad (62.15)$$

Таким образом, при пренебрежении флуктуациями  $\delta \tilde{E}$  уравнения (62.11), (62.12), а в приближении локального равновесия уравнение (62.11) с начальным условием (62.13) дают полное описание крупномасштабных флуктуаций.

Вместо системы уравнений (62.11), (62.12) можно использовать эквивалентное уравнение Ланжевена

$$(\hat{L}_a + \delta \hat{J}_{ax}) \delta N_a^{\text{нст}} = y_a(x, t), \quad (62.16)$$

которое представляет собой линеаризованное уравнение Больцмана для плазмы с учетом поляризации (через эффективный потенциал).

В следующем параграфе мы установим связь корреляции и спектральной плотности случайного источника  $y_a$  в уравнении Ланжевена с функцией  $A_{ab}(x, x', t)$ , являющейся источником в уравнении (62.6) для одновременного момента  $\overline{(\delta N_a \delta N_b)_{x, x', t}}$ .

Как и в § 22, функцию  $A_{ab}$  можно представить в виде суммы двух частей

$$A_{ab}(x, x', t) = \tilde{A}_{ab} + A_{ab}^{\text{в}}. \quad (62.17)$$

Первое слагаемое определяется крупномасштабными флуктуациями и обращается в нуль в равновесном состоянии. Оно определяется выражением, аналогичным выражению (22.23):

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{ab}(x, x', t) = n_a \delta_{ab} \left[ \delta(x - x') \tilde{I}_a(x, t) - \right. \\ \left. - \frac{1}{V} (\tilde{I}_a(x, t) \tilde{f}_b(x', t) + \tilde{I}_b(x', t) \tilde{f}_a(x, t)) \right], \quad (62.18) \end{aligned}$$

и, следовательно, выражается через интеграл столкновений  $I_a$ . Явное выражение для него будет найдено в § 64.

Второе слагаемое в (62.17) определяется формулой, аналогичной формуле (22.27)<sub>2</sub>. Эта часть функции  $A_{ab}$  определяется дискретностью актов столкновений и остается не равной нулю и в равновесном состоянии.

### § 63. Спектральные плотности крупномасштабных флуктуаций

Рассмотрим спектральные плотности крупномасштабных флуктуаций для идеальной плазмы, т. е. без учета временного запаздывания и пространственной неоднородности функций распределения  $f_a$ .

Найдем сначала спектральные функции источников флуктуаций и через них, используя уравнение (62.10), найдем спектральные плотности крупномасштабных флуктуаций  $\delta\tilde{N}_a$ ,  $\delta\tilde{E}$ .

Заметим, что уравнения (62.11), (62.12) аналогичны уравнениям (22.44), (22.45). Используя эту аналогию, можно сразу записать решение уравнений (62.11), (62.12), соответствующее решению (23.6):

$$(\delta N_a \delta N_b)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'}^{\text{ист}} = \frac{A_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}')}{[-i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) + \hat{F}_{a\mathbf{p}}][i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}') + \hat{F}_{b\mathbf{p}'}]}. \quad (63.1)$$

Здесь использовано обозначение

$$\hat{F}_{a\mathbf{p}} = F_{a0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} + \delta\hat{I}_{a\mathbf{p}}, \quad (63.2)$$

соответствующее обозначению (23.3). Оператор  $\delta\hat{I}_{a\mathbf{p}}$  совпадает с (62.8). Зависимость от  $\mathbf{r}$  и  $t$  не указываем, так как для идеальной плазмы эти переменные входят в интеграл столкновений как параметры.

Выражение для пространственной компоненты Фурье в (63.1) для функции  $A_{ab}$  находим из выражения (62.7):

$$A_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}') = (\hat{F}_{a\mathbf{p}} + \hat{F}_{b\mathbf{p}'}) n \delta_{ab} (\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') f_a - f_a(\mathbf{p}) f_b(\mathbf{p}')) + + n_a n_b \left\{ \int \hat{\theta}_{ab} f_a(\tilde{\mathbf{P}}) f_b(\tilde{\mathbf{P}}') d\mathbf{r} - (I_a^B(\mathbf{p}) f_b(\mathbf{p}') + I_b^B(\mathbf{p}') f_a(\mathbf{p})) \right\}. \quad (63.3)_t$$

При получении этого выражения учтено, что в нулевом приближении по  $kl_\phi \sim kr_D$  компоненты Фурье выражения

$$\hat{\theta}_{ab} f_a(\tilde{\mathbf{P}}) f_b(\tilde{\mathbf{P}}')$$

не зависят от  $\mathbf{k}$  (ср. с соответствующим приближением при выводе (23.4)). Кроме того, учтено равенство  $(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} = 0)/V = 1$ , которое использовано при преобразовании второго и четвертого членов в (62.7).

Выражение (63.3) обладает свойствами

$$\int A_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}') d\mathbf{p} = \int A_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}') d\mathbf{p}' = 0. \quad (63.4)$$

Сопоставляя решение (63.1) с соответствующим решением уравнения Ланжевена (62.16), находим связь спектральной плотности случайного источника в уравнении (62.16) с функцией  $A_{ab}$ :

$$(y_a y_b)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'} = A_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'). \quad (63.5)$$

Это равенство соответствует равенству (23.8) для газа.

Поскольку правая часть в (63.5) не зависит от  $\omega$ , а при  $kr_D \ll 1$  и от  $\mathbf{k}$ , то случайный источник в уравнении Ланжевена является  $\delta$ -коррелированным и по времени и по пространству.

В приближении локального равновесия в (63.3)<sub>1</sub> член в фигурных скобках обращается в нуль и

$$A_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}') = (\hat{f}_{ap} + \hat{f}_{bp'}) n_a \delta_{ab} (\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') f_a(\mathbf{p}) - f_a f_b). \quad (63.3)_2$$

Тогда из (63.1), (63.3)<sub>2</sub>

$$(\delta N_a \delta N_b)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'}^{\text{нст}} = \frac{(\hat{f}_{ap} + \hat{f}_{bp'}) n_a \delta_{ab} (\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') f_a(\mathbf{p}) - f_a f_b)}{[(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) + i\hat{f}_{ap}] [(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}') - i\hat{f}_{bp'}]}. \quad (63.6)$$

Обратимся теперь к уравнениям (62.10), чтобы найти спектральные плотности флуктуаций  $\delta \tilde{N}_a$ ,  $\delta \tilde{E}$ . Из первого уравнения (62.10) следует

$$\begin{aligned} \delta N_a(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, t) = \\ = \delta N_a^{\text{нст}}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, t) - \frac{ie_a n_a}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\hat{f}_{ap}} \delta E(\omega, \mathbf{k}) \frac{\partial f_a(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}. \end{aligned} \quad (63.7)$$

Из уравнений поля получаем второе уравнение

$$\begin{aligned} \delta E(\omega, \mathbf{k}) + \frac{i\mathbf{k}}{k^2} \sum_a 4\pi e_a \int \delta N_a(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) d\mathbf{p} = \\ = - \frac{i\mathbf{k}}{k^2} \sum_a 4\pi e_a \int \delta N_a^{\text{нст}} d\mathbf{p} \equiv \delta E^{\text{нст}}(\omega, \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (63.8)$$

Система уравнений (63.7), (63.8) отличается от системы уравнений (35.2), (34.12) заменой

$$\frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\Delta} \rightarrow \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\hat{f}_{ap}} \equiv \hat{L}_{a, \omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}}^{-1}, \quad (63.9)$$

поэтому для спектральной плотности флуктуаций поля снова получаем выражение

$$(\delta \tilde{E} \delta \tilde{E})_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{(\delta \tilde{E} \delta \tilde{E})_{\omega, \mathbf{k}}^{\text{нст}}}{|\tilde{\epsilon}(\omega, \mathbf{k})|^2}, \quad (63.10)$$

подобное (35.6). Однако диэлектрическая проницаемость и спектральная плотность источника флуктуаций определяются теперь иными выражениями:

$$\tilde{\epsilon}(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum_{ab} \frac{4\pi e_a^2 n_a}{k^2} \int \hat{L}_{a, \omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}}^{-1} \mathbf{k} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p}, \quad (63.11)$$

$$(\delta \tilde{E} \delta \tilde{E})_{\omega, \mathbf{k}}^{\text{нст}} = \sum_{ab} \frac{(4\pi)^2 e_a e_b}{k^2} \int \hat{L}_{a, \omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}}^{-1} \hat{L}_{b, \omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}'}^{-1*} A_{ab}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') d\mathbf{p} d\mathbf{p}'. \quad (63.12)_1$$

Последнее выражение следует из (63.8) и (63.1).



Для состояния локального равновесия выражение (63.12) принимает значительно более простой вид:

$$(\delta \tilde{E} \delta \tilde{E})_{\omega, k}^{\text{нст}} = \sum_a \frac{(4\pi)^2 e_a^2 n_a}{k^2} 2 \operatorname{Re} \int i L_{a, \omega, k}^{-1} f_a(p) dp. \quad (63.12)_2$$

Преобразуем это выражение для равновесного состояния. Учитывая, что в равновесном состоянии

$$\hat{f}_{ap} f_a = \delta \hat{I}_{ap} f_a = 0, \quad (63.13)$$

можно в (63.12)<sub>2</sub> записать

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \int i \hat{L}_{a, \omega, k, p}^{-1} f_a(p) dp &= 2 \operatorname{Re} \int \frac{i}{\omega - kv + \delta \hat{I}_{ap}} \frac{\omega + i \delta \hat{I}_{ap}}{\omega} f_a dp = \\ &= 2 \operatorname{Re} \int \frac{ikv}{\omega - kv + i \delta \hat{I}_{ap}} f_a dp = -2 \operatorname{Re} \int \frac{ik \partial f_a / \partial p}{\omega - kv + i \delta \hat{I}_{ap}} dp \kappa T. \end{aligned} \quad (63.14)$$

Используя также выражение для мнимой части диэлектрической проницаемости, которое следует из (63.11), можно записать выражение (63.12)<sub>2</sub> в виде

$$(\delta \tilde{E} \delta \tilde{E})_{\omega, k} = \frac{8\pi}{\omega} \frac{\operatorname{Im} \tilde{\epsilon}(\omega, k)}{|\tilde{\epsilon}(\omega, k)|^2} \kappa T. \quad (63.15)$$

Такая форма записи для состояния равновесия является универсальной.

Рассмотрим теперь выражение для спектральной плотности  $(\delta \tilde{N}_a \delta \tilde{E})_{\omega, k, p}$ , определяющей интеграл столкновений  $\mathcal{I}_a$ . Из уравнения (63.7) следует, что эту спектральную плотность можно представить в виде суммы двух частей (знак  $\sim$  опускаем)

$$(\delta N_a \delta E)_{\omega, k, p} = (\delta N_a \delta E)_{\omega, k, p}^{\text{ннд}} + (\delta N_a^{\text{нст}} \delta E)_{\omega, k, p}. \quad (63.16)$$

Индукционная часть спектральной плотности определяется формулой

$$(\delta N_a \delta E)_{\omega, k, p}^{\text{ннд}} = - \frac{ie_a n_a}{\omega - kv + i \hat{f}_{ap}} (\delta E \delta E)_{\omega, k} \frac{k}{k^2} \left( k \frac{\partial f_a}{\partial p} \right), \quad (63.17)$$

и, следовательно, она выражается через спектральную плотность флуктуаций поля. Второй вклад в (63.16) определяется

выражением

$$(\delta N_a^{\text{нст}} \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}} = \frac{1}{\varepsilon^*(\omega, \mathbf{k})} (\delta N_a \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}}^{\text{нст}} \quad (63.18)$$

В этом выражении диэлектрическая проницаемость определяется формулой (63.11), а спектральная плотность

$$(\delta N_a \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}}^{\text{нст}} = \frac{i\mathbf{k}}{k^2} \sum_b 4\pi e_b \int \frac{A_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}') d\mathbf{p}'}{[(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) + i\hat{f}_{ap}][(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}') - i\hat{f}_{bp}']} \quad (63.19)_1$$

Это выражение следует из (63.1) и (63.8).

В приближении локального равновесия вместо (63.1) следует использовать более простую формулу (63.6). Тогда вместо (63.19)<sub>1</sub>

$$(\delta N_a \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}}^{\text{нст}} = \frac{i\mathbf{k}}{k^2} 4\pi e_a n_a 2 \operatorname{Re} i\hat{L}_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}}^- f_a(\mathbf{p}). \quad (63.19)_2$$

Запишем, наконец, выражение для реальной части спектральной плотности (63.16). Она определяет интеграл столкновений  $\tilde{f}_a$  идеальной плазмы. В приближении локального равновесия из (63.17) — (63.19)<sub>2</sub> находим

$$\operatorname{Re} (\delta N_a \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}} = -e_a n_a \operatorname{Re} i\hat{L}_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}}^{-1} (\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}}{k^2} \left( \mathbf{k} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} \right) - 4\pi e_a n_a \frac{\mathbf{k}}{k^2} \frac{\operatorname{Im} \varepsilon}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} 2 \operatorname{Re} i\hat{L}_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}}^{-1} f_a. \quad (63.20)$$

Если приближение локального равновесия недостаточно, то при получении выражения для спектральной плотности (63.20) вместо (63.12)<sub>2</sub> надо использовать выражение (63.12)<sub>1</sub>.

Аналогичным путем можно найти выражение для самой общей спектральной плотности крупномасштабных флуктуаций  $(\delta \tilde{N}_a \delta \tilde{N}_b)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'}$ .

Приведенные выражения для спектральных плотностей крупномасштабных флуктуаций не являются явными, так как содержат операторы  $\hat{L}_{a, \omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}}^{-1}$ , которые в свою очередь определяются операторами  $\hat{f}_{ap}$ ,  $\delta \hat{I}_{ap}$ . Из-за сложности операторов столкновений получение явных выражений для спектральных плотностей представляет сложную задачу. В некоторых случаях для упрощения целесообразно использовать модельные выражения для интегралов столкновений  $I_a^B$ . Так, например, в работе Ситенко и Гурина [54] для расчета флуктуаций в равновесной плазме для интеграла столкновений использовано приближение Батнагара—Гросса — Крука [55]. Используемый в работе метод расчета флуктуаций подробно изложен в книгах [15].

### § 64. Кинетические уравнения для плазмы с учетом крупномасштабных флуктуаций

Представим интеграл столкновений (62.5) в виде

$$\tilde{I}_a = -\frac{e_a}{n_a} \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \int \operatorname{Re} (\delta N_a \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}} d\omega d\mathbf{k}. \quad (64.1)$$

Используя выражение (63.20), получим

$$\begin{aligned} \tilde{I}_a(x, t) = & \frac{e_a^2}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \int \frac{\mathbf{k}}{k^2} \operatorname{Re} i \hat{L}_{a, \omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}}^{-1} \left[ (\delta \tilde{\mathbf{E}} \delta \tilde{\mathbf{E}})_{\omega, \mathbf{k}} \mathbf{k} \frac{\partial f_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{p}} + \right. \\ & \left. + \frac{8\pi \operatorname{Im} \tilde{\varepsilon}(\omega, \mathbf{k})}{|\tilde{\varepsilon}(\omega, \mathbf{k})|^2} f_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \right] d\omega d\mathbf{k}. \quad (64.2) \end{aligned}$$

Если в этом выражении в операторе  $L^{-1}$  заменить  $\hat{f}_{a\mathbf{p}}$  на  $\Delta$  и произвести предельный переход  $\Delta \rightarrow 0$ , то оно совпадет с интегралом столкновений Балеску — Ленарда в форме (37.2).

В равновесном состоянии выражение (62.5) обращается в нуль. Действительно, при подстановке в (64.2) распределения Максвелла подинтегральное выражение, с учетом формулы (63.15), можно представить в виде

$$\begin{aligned} (\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}}{k^2} \operatorname{Re} i L_{a, \omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}}^{-1} \left[ \mathbf{k} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\omega}{\kappa T} f_a \right] = \\ = \frac{(\delta \mathbf{E} \delta \mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}}}{\kappa T} \frac{\mathbf{k}}{k^2} \operatorname{Re} i L_{a, \omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}}^{-1} (\omega - \mathbf{k}v) f_a = 0, \end{aligned}$$

так как в равновесном состоянии  $\delta \hat{I}_{a\mathbf{p}} f_a = 0$ .

Интеграл столкновений (64.2) обладает свойствами

$$\sum_a n_a \int \varphi_a(\mathbf{p}) I_a d\mathbf{p} = 0 \quad \text{при} \quad \varphi_a = 1, \mathbf{p}, \mathbf{p}^2/2m_a. \quad (64.3)$$

Напомним, что форма (64.2) для интеграла столкновений  $I_a$  справедлива, когда в формуле (63.3)<sub>1</sub> можно пренебречь членом в фигурных скобках и использовать для функции  $A_{ab}$  более простое выражение (63.3)<sub>2</sub>. Это справедливо, в частности, для состояния локального равновесия.

Поскольку при конкретных расчетах из-за сложности оператора  $\delta \hat{I}_{a\mathbf{p}}$  приходится использовать модельные выражения для интеграла столкновений Больцмана, то целесообразно использовать форму (64.2) и для состояний, отличающихся от состояния локального равновесия. Кинетическое уравнение с интегралом столкновений (62.4), (64.2) справедливо лишь для идеальной плазмы. Рассмотрим соответствующее уравнение для неидеальной плазмы.

Кинетическое уравнение для неидеальной плазмы также можно записать в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + (e_a \mathbf{E} + \mathbf{F}_{a0}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) f_a = I_a^B + \tilde{I}_a. \quad (64.4)$$

Теперь, однако, интеграл столкновений  $I_a^B$  состоит из трех частей (см. (58.8)), которые определяются формулами (59.7) — (59.9).

Для интеграла  $I_a$  вместо выражений (62.5), (64.1) следует использовать выражения, аналогичные выражениям (58.4), (58.7). Таким образом, вместо (64.1) получим

$$\begin{aligned} \tilde{I}_a(x, t) = & -\frac{e_a}{n_a} \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial p_i} \int \left\{ \operatorname{Re} (\delta \tilde{N}_a \delta \tilde{E}_i)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{r}, t} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{k^2} \left( \frac{\delta_{ij}}{2} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \frac{\partial}{\partial r_j} \operatorname{Im} (\delta \tilde{N}_a (\mathbf{k} \delta \tilde{E}))_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{r}, t} \right\} d\omega d\mathbf{k}. \quad (64.5) \end{aligned}$$

Чтобы найти явное выражение для этого интеграла, надо произвести расчет спектральной плотности  $(\delta \tilde{N}_a \delta \tilde{E})_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{r}, t}$  с учетом (в первом приближении) временного запаздывания и пространственной неоднородности функций распределения  $f_a$ .

Поскольку в формулу (64.5) входит спектральная плотность флуктуаций с временами корреляции  $\tau_{\text{кор}} > 1/\omega_L$ , то флуктуации можно рассматривать как плазмоны (см. § 57). Тогда для пространственно однородной плазмы учет неидеальности, связанной с временным запаздыванием, можно произвести по аналогии с тем, как это было сделано в § 57. В частности, выражение для интеграла  $I_a$  неидеальной пространственно однородной плазмы можно записать по аналогии с (57.8):

$$\begin{aligned} \tilde{I}_a(\mathbf{p}, t) = & \frac{e_a^2}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \int \frac{\mathbf{k}}{k^2} \operatorname{Re} i \hat{L}_{a, \omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}}^{-1} \left[ (\delta \tilde{E} \delta \tilde{E})_{\omega, \mathbf{k}, t - \tau/2} \times \right. \\ & \left. \times \mathbf{k} \frac{\partial f_a(\mathbf{p}, t, -\tau)}{\partial \mathbf{p}} + \frac{8\pi \operatorname{Im} \bar{\epsilon}(\omega, \mathbf{k})}{|\bar{\epsilon}(\omega, \mathbf{k})|^2} f_a(\mathbf{p}, t - \tau) \right] d\mathbf{k} d\omega. \quad (64.6) \end{aligned}$$

Если пренебречь запаздыванием, то это выражение совпадет с (64.2). Как и в (57.8), здесь имеет смысл удерживать лишь члены нулевого и первого порядка по запаздыванию.

Спектральная плотность флуктуаций поля в (64.6) удовлетворяет уравнению, аналогичному уравнению (57.15):

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\delta \tilde{E} \delta \tilde{E})_{\omega, \mathbf{k}, t}}{\partial t} = & -2\tilde{\gamma} \left[ (\delta \tilde{E} \delta \tilde{E})_{\omega, \mathbf{k}, t} - \frac{(\delta \tilde{E} \delta \tilde{E})_{\omega, \mathbf{k}, t}^{\text{нст}}}{|\bar{\epsilon}(\omega, \mathbf{k})|^2} \right] - \\ & - 2 \frac{\partial^2 \operatorname{Re} \bar{\epsilon}}{\partial t \partial \omega} \left[ \frac{\partial \operatorname{Re} \bar{\epsilon}}{\partial \omega} \right]^{-1} (\delta \tilde{E} \delta \tilde{E})_{\omega, \mathbf{k}, t}. \quad (64.7) \end{aligned}$$

Здесь

$$\tilde{\gamma} = \text{Im} \tilde{\varepsilon} \left[ \frac{\partial \text{Re} \tilde{\varepsilon}}{\partial \omega} \right]^{-1}, \quad \text{Re} \tilde{\varepsilon}(\omega, \mathbf{k}) = 0 \quad (64.8)$$

— декремент затухания и дисперсионное уравнение крупномасштабных колебаний.

С учетом зависимости частоты от времени в уравнении (64.7) появится дополнительный член, аналогичный (57.16). Соответствующий член появится и в кинетическом уравнении.

При учете пространственной неоднородности в выражении для  $\tilde{I}_a$  возникнут два дополнительных члена. Один из них определяется вторым членом в (64.5). Для его преобразования достаточно использовать выражение для спектральной плотности в нулевом приближении по запаздыванию и пространственной неоднородности. Это выражение нам известно. Оно определяется формулами (63.16) — (63.19)<sub>2</sub>.

Второй дополнительный вклад связан с учетом неоднородности спектральной плотности  $(\delta N_a \delta E)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{r}, t}$  в первом члене (64.5).

### § 65. Газодинамические уравнения с учетом крупномасштабных флуктуаций

При учете крупномасштабных флуктуаций дополнительные вклады появятся в газодинамических уравнениях для плазмы как в термодинамических функциях, так и в кинетических коэффициентах.

Так, например, вместо выражения (60.20) для части плотности внутренней энергии, определяемой взаимодействием, теперь будем иметь выражение

$$\Delta U^a = \sum_{ab} \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \left\{ \int_{\mathbf{k} > 1/r_D} v_{ab}(\mathbf{k}) (\delta n_a \delta n_b)_{\mathbf{k}, \mathbf{r}, t} d\mathbf{k} + \int_{\mathbf{k} < 1/r_D} v_{ab}(\mathbf{k}) (\delta \tilde{n}_a \delta \tilde{n}_b)_{\mathbf{k}, \mathbf{r}, t} d\mathbf{k} \right\}. \quad (65.1)$$

Второй член здесь и учитывает вклад крупномасштабных флуктуаций.

В равновесном состоянии оба интеграла объединяются, и мы получим известный результат равновесной теории. Вклад второго члена в (65.1) значителен, если состояние для области спектра  $\mathbf{k} < 1/r_D$  заметно отличается от равновесного.

Выражения, аналогичные (65.1), могут быть записаны и для других термодинамических функций.

В соответствии со структурой интеграла столкновений

$$I_a = I_a^B + \tilde{I}_a \quad (65.2)$$

коэффициент вязкости можно представить в виде

$$\eta_a \sim \frac{n_a \kappa T_a}{v_a^B + \tilde{v}_a}. \quad (65.3)$$

Здесь  $v_a^B$  — частота столкновений для интеграла  $I_a^B$ , а  $\tilde{v}_a$  — для интеграла  $\tilde{I}_a$ .

Для состояний, близких к равновесному, выражение (65.3) соответствует обычному выражению для коэффициента вязкости. Если же в области крупных масштабов ( $k < 1/r_D$ ) есть сильные отклонения от равновесия, например, плазма находится в турбулентном состоянии, то возможно изменение знака частоты столкновений  $\tilde{v}_a$ . В результате произойдет увеличение коэффициента вязкости.

Здесь нет возможности разобрать конкретные примеры, поэтому лишь укажем литературу, которая может быть полезна при решении такого рода задач [19—24, 26—30].

Заметим, что проблема разделения флуктуаций на мелкомасштабные и крупномасштабные существует и в теории бесстолкновительной плазмы. Времена корреляции мелкомасштабных флуктуаций определяются, например, затуханием Ландау. Времена же корреляции крупномасштабных флуктуаций могут, например, определяться временами пролета — временами жизни частиц в рассматриваемом объеме, диссипативными процессами на границе системы и т. д.

Кинетические флуктуации играют существенную роль в различных системах. Они, например, определяют естественные флуктуации излучения лазеров и молекулярных генераторов [56—58]. При этом кинетические флуктуации в лазерах схожи с кинетическими флуктуациями в столкновительной плазме, а в молекулярных генераторах — с флуктуациями в бесстолкновительной плазме.

Отметим, наконец, что в настоящее время интенсивно развивается теория крупномасштабных флуктуаций в электрон-фононных системах [59—62].

## КВАНТОВЫЕ КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕИДЕАЛЬНОГО ГАЗА И НЕИДЕАЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

---

### ВВЕДЕНИЕ

Последняя часть книги посвящена изложению квантовой кинетической теории неидеального газа и неидеальной плазмы. Термин «неидеальный» означает, как и выше, что в рамках определенной модели (приближение парных столкновений, поляризационное приближение и т. д.) вклад взаимодействия учитывается не только в диссипативных, но и недиссипативных членах.

Первая попытка построения квантового кинетического уравнения Больцмана для неидеального газа была сделана в работе Грина [1], но она оказалась не вполне удачной. Более последовательный вывод кинетического уравнения Больцмана для неидеального газа проведен в работах Каданова и Бейма [2], Бэрвинкеля и Гроссмана [3, 4], Климонтовича и Эбелинга [5].

Квантовые кинетические уравнения для неидеальной полностью ионизованной невырожденной плазмы рассмотрены в работе Климонтовича и Эбелинга [5]. В работе Климонтовича и Крэфта [6] проведен учет обменных эффектов в кинетическом уравнении для неидеальной полностью ионизованной плазмы.

Для описания кинетических процессов в квантовой идеальной плазме обычно используется кинетическое уравнение, которое является квантовым аналогом кинетического уравнения Балеску — Ленарда [7, 8]. В этом уравнении, как и в классическом уравнении Балеску — Ленарда, учитывается динамическая поляризация плазмы, что обеспечивает экранировку взаимодействия заряженных частиц на больших расстояниях. Вклад взаимодействия частиц на малых расстояниях учитывается в интеграле столкновений лишь в приближении теории возмущений по взаимодействию (борновское приближение).

Для неидеальной плазмы приближение теории возмущений не является удовлетворительным, так как вклад взаимодействия частиц на малых расстояниях в термодинамические функции является существенным. Вследствие этого на малых расстояниях следует использовать приближение парных столкновений.

Мы уже знаем, что одновременный учет эффектов динамической поляризации, проявляющейся на больших расстояниях, и

сильных взаимодействий на малых расстояниях для неидеальной плазмы приводит к очень сложным уравнениям. Вследствие этого, как и в §§ 55, 56, в интеграле столкновений будет учитываться лишь усредненная динамическая поляризация, но зато на малых расстояниях будут учтены вклады всех членов теории возмущений по взаимодействию. Тем самым на малых расстояниях будет учтено сильное взаимодействие заряженных частиц.

Значительно более трудной является задача построения кинетических уравнений для химически реагирующих газов и частично ионизованной плазмы. Это связано с необходимостью учета внутренних степеней свободы атомов и молекул.

Кинетическая теория химически реагирующих газов и частично ионизованной плазмы, основанная на квантовых микроскопических уравнениях, начала развиваться сравнительно недавно и, естественно, развита значительно меньше, чем кинетическая теория газов и полностью ионизованной плазмы. Краткому изложению этой теории будет посвящена последняя глава книги. Она включена в книгу, чтобы показать возможные пути обобщения изложенной здесь теории и привлечь внимание к этой очень важной и интересной теме. Естественно, что подробное освещение этих вопросов может быть дано лишь в отдельной книге.



## КВАНТОВЫЕ КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

### § 66. Цепочка уравнений для квантовых функций распределения. Приближение парных столкновений

Пусть газ состоит из нескольких компонент. Обозначим через  $\rho_a(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', t)$ ,  $\rho_{ab}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \mathbf{r}''_1, \mathbf{r}''_2, t)$ , ... одночастичную, двухчастичную и т. д. матрицы плотности ( $a, b$  — индексы компонент). Через  $f_a, f_{ab}$  обозначим соответствующие квантовые функции распределения — матрицы плотности в представлении Вигнера [9—12]. Функции  $f_a, \rho_a$  связаны следующим образом:

$$f_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \rho_a\left(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\nu}, \mathbf{r} - \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\nu}\right) e^{-i\boldsymbol{\nu}\mathbf{p}} \left(\frac{2\pi\hbar}{V}\right)^3 d\boldsymbol{\nu}. \quad (66.1)$$

Условия нормировки:

$$\int f_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} = 1, \quad \int \rho_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}, t) \frac{d\mathbf{r}}{V} = 1. \quad (66.2)$$

Соотношения, аналогичные (66.1), имеют место и для функций  $f_{ab}, \rho_{ab}; f_{abc}, \rho_{abc}; \dots$

Для квантовых функций распределения  $f_a, f_{ab}, \dots$  или для матриц плотности  $\rho_a, \rho_{ab}$  можно записать цепочку уравнений, аналогичную цепочке уравнений Боголюбова для классических функций распределения. Первое уравнение цепочки — уравнение для функции распределения  $f_a$  имеет вид [10—12]

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{r}_1} - \frac{i}{\hbar} \frac{1}{(2\pi)^3} \int [U_{a0}(\mathbf{r}_1 - \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\nu}) - U_{a0}(\mathbf{r}_1 + \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\nu})] \times \\ \times e^{i\boldsymbol{\nu}(\mathbf{n}-\mathbf{p})} f(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\eta}, t) d\boldsymbol{\nu} d\boldsymbol{\eta} = \frac{i}{\hbar} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_b N_b \int [\Phi_{ab}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\nu}|) - \\ - \Phi_{ab}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\nu}|)] e^{i\boldsymbol{\nu}(\mathbf{n}-\mathbf{p})} f_{ab}(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2) d\boldsymbol{\nu} d\boldsymbol{\eta} \frac{d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2}{(2\pi\hbar)^3}. \end{aligned} \quad (66.3)$$

Здесь  $U_{a0}$  — потенциал внешнего поля. При  $\hbar \rightarrow 0$ , т. е. в классическом пределе, уравнение (66.3) принимает вид

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{F}_{a0} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}_1} = \sum_b N_b \int \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} f_{ab} \frac{d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (66.4)$$

Для однокомпонентного газа это уравнение совпадает с уравнением (1.19). При сопоставлении следует учесть различие в нормировке классических и квантовых функций распределения. Из выражений (1.14), (66.2) следует, что

$$\frac{V}{(2\pi\hbar)^3} f_a^{\text{КВ}} = f_a^{\text{КЛ}}, \quad \frac{V^2}{(2\pi\hbar)^6} f_{ab}^{\text{КВ}} = f_{ab}^{\text{КЛ}}. \quad (66.5)$$

В дальнейшем вместо функции  $f_{ab}$  удобнее использовать соответствующую матрицу плотности  $\rho_{ab}$ . Функции  $f_{ab}$ ,  $\rho_{ab}$  связаны соотношением, аналогичным соотношению (66.1). По аналогии с (2.4) введем корреляционную матрицу плотности

$$\rho_{ab} = \rho_a \rho_b + g_{ab}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \mathbf{r}''_1, \mathbf{r}''_2, t), \quad (66.6)$$

где  $\rho_a$ ,  $\rho_b$  — одночастичные матрицы плотности.

В результате уравнение (66.3) примет вид

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{r}_1} - \frac{i}{\hbar} \frac{1}{(2\pi)^3} \int [U_a(\mathbf{r}_1 - 1/2\hbar\mathbf{v}) - U_a(\mathbf{r}_1 + 1/2\hbar\mathbf{v})] \times \\ \times \exp[i\mathbf{v}(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{p}_1)] f_a(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\eta}, t) d\mathbf{v} d\boldsymbol{\eta} = I_a(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t). \quad (66.7)$$

Здесь введено обозначение для интеграла столкновений

$$I_a = \frac{i}{\hbar} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_b N_b \int [\Phi_{ab}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - 1/2\hbar\mathbf{v}|) - \\ - \Phi_{ab}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + 1/2\hbar\mathbf{v}|)] \times \\ \times g_{ab}(\mathbf{r}_1 + 1/2\hbar\mathbf{v}, \mathbf{r}_1 - 1/2\hbar\mathbf{v}, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, t) e^{-i\mathbf{v}\mathbf{p}_1} \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} d\mathbf{v} \frac{d\mathbf{r}_2}{V} \quad (66.8)_1$$

и для потенциала среднего поля

$$U_a(\mathbf{r}_1, t) = U_{a0} + \sum_b N_b \int \Phi_{ab}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \rho_b(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, t) \frac{d\mathbf{r}_2}{V}. \quad (66.9)$$

Для случая пространственно однородного распределения частиц газа выражение (66.8)<sub>1</sub> для интеграла столкновений принимает вид

$$I_a(\mathbf{p}_1, t) = \frac{i}{\hbar} \sum_b N_b \int [\Phi_{ab}(|\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}_2|) - \Phi_{ab}(|\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_2|)] \times \\ \times \rho_{ab}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}''_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, t) \exp[-i(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}''_1)\mathbf{p}_1/\hbar] \frac{d\mathbf{r}'_1 d\mathbf{r}''_1 d\mathbf{r}_2}{V^3}. \quad (66.8)_2$$

Здесь учтено, что при пространственно однородном распределении частиц в интеграле столкновений можно заменить  $g_{ab}$  на  $\rho_{ab}$ .

В классическом приближении уравнение (66.7) для однокомпонентного газа совпадает с уравнением (2.11), а выражение (66.8)<sub>1</sub> — с (2.12).

Рассмотрим, как и в классическом приближении, модель парных столкновений. Для матрицы плотности  $\rho_{ab}$  в этом случае получим уравнение, аналогичное уравнению (2.20) для функции  $f_2$ . Оно имеет вид

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \rho_{ab}}{\partial t} + \left[ \frac{\hbar^2}{2m_a} (\Delta_{r'_1} - \Delta_{r_1''}) + \frac{\hbar^2}{2m_b} (\Delta_{r'_2} - \Delta_{r_2''}) \right] \rho_{ab} - \\ - [\Phi_{ab}(|r'_1 - r'_2|) - \Phi_{ab}(|r''_1 - r''_2|)] \rho_{ab} = \\ = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \int f_a(\mathbf{p}_1, t) f_b(\mathbf{p}_2, t) \exp[i(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}''_1) \mathbf{p}_1 / \hbar + \\ + i(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}''_2) \mathbf{p}_2 / \hbar] \frac{V^2}{(2\pi\hbar)^6} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{ab}^0(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \mathbf{r}''_1, \mathbf{r}''_2, t). \end{aligned} \quad (66.10)$$

Здесь  $\rho_{ab}^0$  — двухчастичная матрица плотности  $\rho_{ab}$ , но без учета корреляции частиц.

Произведем разложение двухчастичной матрицы плотности по собственным функциям гамильтониана двух частиц, т. е. по функциям, определяемым уравнением

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m_a} \Delta_{r_1} - \frac{\hbar^2}{2m_b} \Delta_{r_2} + \Phi_{ab}(|r_1 - r_2|) \right] \Psi_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}(r_1, r_2) = \\ = E_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \Psi_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}(r_1, r_2); \end{aligned} \quad (66.11)$$

$$\int \Psi_{\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2}^*(r_1, r_2) \Psi_{\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2}(r_1, r_2) dr_1 dr_2 = \frac{(2\pi\hbar)^6}{V^2} \delta(\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}''_1) \delta(\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}''_2). \quad (66.12)$$

С учетом зависимости от времени

$$\Psi_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}(r_1, r_2, t) = \exp(-iE_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} t / \hbar) \Psi_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}(r_1, r_2). \quad (66.13)$$

В приближении свободного движения

$$\Psi_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}(r_1, r_2) = \frac{1}{V} \exp[i(\mathbf{r}_1 \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \mathbf{p}_2) / \hbar]. \quad (66.14)$$

Разложение матрицы плотности по собственным функциям запишем в виде

$$\begin{aligned} \rho_{ab}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}''_1, \mathbf{r}'_2, \mathbf{r}''_2, t) = \left[ \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \right]^4 \int \rho_{ab}(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}''_1, \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}''_2, t) \times \\ \times \Psi_{\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) \Psi_{\mathbf{p}''_1, \mathbf{p}''_2}^*(\mathbf{r}''_1, \mathbf{r}''_2) d\mathbf{p}'_1 d\mathbf{p}''_1 d\mathbf{p}'_2 d\mathbf{p}''_2. \end{aligned} \quad (66.15)$$

Используя это разложение, из (66.10) находим уравнение для матрицы плотности в импульсном представлении

$$\left[ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - (E_{p'_1 p'_2} - E_{p''_1 p''_2}) \right] \rho_{ab}(p'_1, p''_1, p'_2, p''_2, t) = \\ = i\hbar \frac{\partial \rho_{ab}^0}{\partial t}(p'_1, p''_1, p'_2, p''_2, t). \quad (66.16)$$

Запишем решение этого уравнения при условии полного ослабления начальных корреляций (ср. с решением (12.1)):

$$\rho_{ab} = \exp[-i(E_{p'_1 p'_2} - E_{p''_1 p''_2}) \tau / \hbar] \rho_{ab}^0(p'_1, p''_1, p'_2, p''_2, t - \tau) + \\ + \int_0^\tau \exp[-i(E_{p'_1 p'_2} - E_{p''_1 p''_2}) \tau / \hbar] \frac{\partial}{\partial t} \rho_{ab}^0(p'_1, p''_1, p'_2, p''_2, t - \tau') d\tau'. \quad (66.17)$$

Используя это решение и разложение (66.15), найдем матрицу плотности  $\rho_{ab}$  в координатном представлении. Введем обозначение для матрицы перехода

$$A(-\tau) = \int \Psi_{p'_1 p'_2}(r'_1, r'_2) \Psi_{p''_1 p''_2}^*(r''_1, r''_2) \Psi_{p'_1 p'_2}^*(q'_1, q'_2, -\tau) \times \\ \times \Psi_{p''_1 p''_2}(q''_1, q''_2, -\tau) dp'_1 dp''_1 dp'_2 dp''_2 \left[ \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \right]^4. \quad (66.18)$$

Тогда

$$\rho_{ab}(r'_1, r''_1, r'_2, r''_2) = \int \left\{ A(-\tau) \rho_{ab}^0(q'_1, q''_1, q'_2, q''_2, t - \tau) + \right. \\ \left. + \int_0^\tau A(-\tau') \frac{\partial}{\partial t} \rho_{ab}^0(q'_1, q''_1, q'_2, q''_2, t - \tau') d\tau' \right\} dq'_1 dq''_1 dq'_2 dq''_2. \quad (66.19)$$

Это выражение аналогично выражению (12.1) в классической теории.

Подставим это решение в выражение (66.8)<sub>2</sub>. Мы выразим, таким образом, интеграл столкновений через первые функции распределения. Напомним, что функция  $\rho_{ab}^0$  определяется выражением (66.10).

Выражение (66.8)<sub>2</sub> можно упростить, если ограничиться первым приближением по  $\tau_0 \partial / \partial t$ , т. е. первым приближением по запаздыванию. Представим, как и в § 12, интеграл столкновений в виде суммы двух частей

$$I_a = I_{a1} + I_{a2}. \quad (66.20)$$

Первый член соответствует нулевому приближению по запаздыванию. В этом приближении из (66.19) следует

$$\rho_{ab}^1 = \int A(-\infty) \rho_{ab}^0(q'_1, q''_1, q'_2, q''_2, t) dq'_1 dq''_1 dq'_2 dq''_2.$$

При  $\tau \rightarrow \infty$  в выражении (66.18) для  $A(-\tau)$

$$\begin{aligned} & \Psi_{p'_1 p'_2}^*(q'_1, q'_2, -\tau) \Psi_{p''_1 p''_2}(q''_1, q''_2, -\tau) \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{1}{V^2} \exp[-i(p'_1 q'_1 + p'_2 q'_2)/\hbar] \exp[i(p''_1 q''_1 + p''_2 q''_2)/\hbar], \end{aligned}$$

так как в нулевом приближении по запаздыванию корреляция начальных состояний полностью отсутствует. В результате после интегрирования по  $q'_1, q''_1, q'_2, q''_2$  и  $p'_1, p''_1, p'_2, p''_2$  в нулевом приближении по запаздыванию получим

$$\begin{aligned} \Phi_{ab}^1(r'_1, r''_1, r'_2, r''_2, t) = & \frac{V^4}{(2\pi\hbar)^6} \int \Psi_{p_1 p_2}(r'_1, r'_2) \Psi_{p_1 p_2}^*(r''_1, r''_2) \times \\ & \times f_a(p_1, t) f_b(p_2, t) dp_1 dp_2. \end{aligned} \quad (66.21)$$

Из (66.8)<sub>2</sub>, (66.21) находим выражение для первой части интеграла столкновений. Запишем его в виде

$$\begin{aligned} I_{a1}(p_1, t) = & \frac{i}{\hbar} \frac{V^2}{(2\pi)^3} \sum_b N_b \int [\Phi_{ab}(|r_1 - r_2 - \frac{1}{2} \hbar v|) - \\ & - \Phi_{ab}(|r_1 - r_2 + \frac{1}{2} \hbar v|)] e^{-i v p_1} \Psi_{p'_1 p'_2}(r_1 + \frac{1}{2} \hbar v, r_2) \times \\ & \times \Psi_{p'_1 p'_2}^*(r_1 - \frac{1}{2} \hbar v, r_2) f_a(p'_1, t) f_b(p_2, t) dv dp'_1 \frac{dr_2 dp_2}{(2\pi\hbar)^3}. \end{aligned} \quad (66.22)$$

Это выражение совпадает с полученным в работе Грина [1]. В работе [13] показано, что это выражение можно привести к обычному виду интеграла столкновений Больцмана с квантовым сечением.

Учет запаздывания дает дополнительный вклад в интеграл столкновений Больцмана, который учитывает неидеальность газа. Выражение для матрицы  $\rho_{ab}^{(2)}$ , определяющей вклад первого приближения, имеет вид

$$\rho_{ab}^{(2)} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty d\tau \int dq'_1 dq''_1 dq'_2 dq''_2 \tau \frac{d}{d\tau} A(-\tau) \rho_{ab}^0(q'_1, q''_1, q'_2, q''_2, t). \quad (66.23)$$

Подставляя это выражение в (66.8)<sub>2</sub>, получим выражение для  $I_{a2}$ . Как и в классической теории, интеграл  $I_{a2}$  определяет вклад запаздывания в недиссипативные характеристики газа.

### § 67. Уравнения переноса и термодинамические функции для неидеального газа

Как и в классическом приближении (см. (11.5)), интеграл столкновений обладает свойствами

$$\sum_a n_a \int \Phi_a(\mathbf{p}_1) I_a d\mathbf{p}_1 = 0 \quad \text{при} \quad \Phi_a = 1, \mathbf{p}_1.$$

Эти равенства обеспечивают законы сохранения числа частиц и импульса газа.

Рассмотрим более подробно закон сохранения энергии. Из кинетического уравнения (66.7) следует закон сохранения энергии с учетом парных столкновений. Вычисления, аналогичные проведенным в § 12, приводят к следующему выражению для плотности внутренней энергии:

$$U = \sum_a n_a \int \frac{p^2}{2m_a} f_a \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} d\mathbf{p} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{ab} n_a n_b \int \Phi_{ab} \rho_{ab}^1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2) d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (67.1)$$

Здесь  $\rho_{ab}^1$  — функция распределения координат двух частиц в нулевом приближении по запаздыванию. Выражение для нее следует из (66.21) и имеет вид

$$\rho_{ab}^1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, t) = \\ = \frac{V^4}{(2\pi\hbar)^6} \int |\Psi_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 f_a(\mathbf{p}_1, t) f_b(\mathbf{p}_2, t) d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2. \quad (67.2)$$

В выражении для внутренней энергии взаимодействие атомов определяет не только второй член (потенциальную энергию), но дает вклад и в кинетическую энергию. Как мы знаем (§ 14), первая функция распределения, как и любая термодинамическая функция, может быть разложена по плотности. В первом приближении по плотности из уравнений (66.7), (66.10) получаем следующее выражение:

$$f_a(\mathbf{p}_1, t) = C \left[ f_a^0 + \sum_b n_b \int g_{ab}(x_1, x_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi\hbar)^3} \right], \quad x = (\mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (67.3)$$

аналогичное классическому выражению (14.4). Постоянная  $C$  определяется из условия нормировки,  $f_a^0$  — функция распределения идеального газа,  $g_{ab} = f_{ab} - f_a f_b$  — корреляционная функция.

Используя выражение для  $C$ , из (67.3) в первом приближении по плотности получим

$$f_a(\mathbf{p}_1, t) = f_a^0 + \sum_b n_b \int \left\{ \int g_{ab}(x_1, x_2, t) \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} d\mathbf{p}_2 - \int g_{ab}(x_1, x_2, t) \left[ \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \right]^2 d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 f_a^0(\mathbf{p}_1, t) \right\} \frac{d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2}{V}. \quad (67.4)$$

Здесь в правую часть можно подставить выражение для  $g_{ab}$  в нулевом приближении по плотности и запаздыванию.

Отличие функции  $f_a(\mathbf{p}, t)$  от функции распределения идеального газа  $f_a^0$  обусловлено корреляциями двух типов: квантовыми корреляциями распределений координат и импульсов частиц и классическими корреляциями, обусловленными взаимодействием. В состоянии равновесия остаются лишь квантовые корреляции, которые исчезают при  $\hbar \rightarrow 0$ . Получим выражение для  $f_a$  с точностью до  $\hbar^2$ .

Используем уравнение для квантовой функции распределения в представлении Вигнера — уравнение (66.3). Решим его методом последовательных приближений по  $\hbar$ , беря в качестве исходной классическую функцию распределения  $f_{ab}^{кл}$  — распределение Максвелла — Больцмана для пары частиц. В приближении парных столкновений приходим к результату

$$f_a^{кв}(\mathbf{p}_1) = f_a^{кл} + \sum_b n_b \frac{\hbar^2}{24\kappa T} \int \left( \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \right)^2 f_a^{кл} g_{ab}^{кл}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \frac{d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2}{V}, \quad (67.5)$$

совпадающему с полученным в работе Грина [1]. Здесь  $g_{ab}^{кл}$  — парная корреляционная функция больцмановского газа в парном приближении.

Из (67.5) находим известное выражение (§ 33 книги [14]) для средней кинетической энергии в состоянии локального равновесия

$$\int \frac{p^2}{2m_a} f_a^{кв} \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} d\mathbf{p} = \frac{3}{2} \kappa T + \frac{\hbar^2}{24m_a \kappa T} \sum_b n_b \int \frac{\partial^2 \Phi_{ab}}{\partial \mathbf{r}_1^2} g_{ab}^{кл} \frac{d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2}{V}.$$

Выражение (67.1) для плотности внутренней энергии можно представить в виде

$$U = U_{ид} + U_{кор}. \quad (67.6)$$

Здесь  $U_{ид}$  — плотность энергии идеального газа. Величина  $U_{кор}$  определяется потенциальной энергией и корреляционной частью кинетической энергии.

Рассмотрим выражение для  $U_{кор}$  в случае локального статистического равновесия. Из (67.4) следует, что корреляционная

добавка к суммарной кинетической энергии всех компонент может быть представлена в виде

$$U_{\text{кор}}^{\text{кин}} = \frac{1}{2} \sum_{ab} n_a n_b V \int \left( \frac{p_1^2}{2m_a} + \frac{p_2^2}{2m_b} - 3kT \right) f_{ab}^0 \frac{dx_1 dx_2}{(2\pi\hbar)^6}. \quad (67.7)$$

Здесь  $f_{ab}^0$  — равновесная квантовая функция распределения.

Функцию  $U_{\text{кор}} = U_{\text{кор}}^{\text{кин}} + U_{\text{пот}}$  можно выразить через более простую функцию распределения  $\rho_{ab}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ . Покажем это. Из (67.1), (67.7) следует

$$U_{\text{кор}} = \frac{V}{2} \sum_{ab} n_a n_b \int (H_{ab} - 3kT) f_{ab}^0 \frac{dx_1 dx_2}{(2\pi\hbar)^6}.$$

Полагая  $\Phi_{ab}(\lambda) = \lambda \Phi_{ab}$ , запишем это выражение в виде

$$U_{\text{кор}} = \frac{V}{2} \sum_{ab} n_a n_b \int_0^1 d\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \int H_{ab}(\lambda) f_{ab}^0 \frac{dx_1 dx_2}{(2\pi\hbar)^6}. \quad (67.8)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \int H_{ab}(\lambda) f_{ab}^0 \frac{dx_1 dx_2}{(2\pi\hbar)^6} &= - \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \lambda} \ln \text{Sp} \exp[-\beta \hat{H}_{ab}(\lambda)] = \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta} \beta \int \frac{\Phi_{ab}(\lambda)}{\lambda} f_{ab}^0 \frac{dx_1 dx_2}{(2\pi\hbar)^6} = \frac{\partial}{\partial \beta} \beta \int \frac{\Phi_{ab}(\lambda)}{\lambda} \rho_{ab}^0 \frac{d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2}{V^2}. \end{aligned} \quad (67.9)$$

Подставляя (67.9) в (67.8) с учетом определения потенциальной энергии (см. (67.1)), получим

$$\begin{aligned} U_{\text{кор}} &= \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta \sum_{ab} n_a n_b \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \Phi_{ab}(\lambda) \rho_{ab}^0 \frac{d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2}{V} = \frac{\partial}{\partial \beta} \beta \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} U_{\text{пот}}(\lambda, \beta), \\ &\quad \beta = 1/kT. \end{aligned} \quad (67.10)$$

Последняя формула (67.10) совпадает с известным результатом квантовой статистической теории равновесного состояния (см., например, приложение 7 в книге [15]).

Полученное нами выражение (67.10) определяет второй вириальный коэффициент разложения внутренней энергии по степеням плотности.

## § 68. Две формы записи квантового интеграла столкновений

В классической теории были использованы две формы записи интеграла столкновений для идеального газа. Одна из них — обычная форма интеграла столкновений Больцмана



(10.18), а вторая — (10.5) была предложена Боголюбовым. Для доказательства эквивалентности этих двух форм было использовано равенство (10.8), которое в нулевом приближении по  $\hbar$  следует из уравнения (10.2) для двухчастичной функции распределения  $f_2$ .

Аналогичное равенство легко установить и для квантового случая, используя уравнение для двухчастичной квантовой функции распределения  $f_{ab}$ . Оно следует из уравнения (66.10), если учесть связь функций  $f_{ab}$ ,  $\rho_{ab}$ . Выполняя преобразования, подобные проведенным в § 10, получим вторую форму записи выражения для интеграла столкновений. При пространственно однородном распределении частиц газа она имеет вид

$$J_a(p_1, t) = \sum_b N_b \int \left( v_1 \frac{\partial}{\partial r_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial r_2} \right) f_{ab}(x_1, x_2, t) \frac{dr_1}{V} \frac{dr_2 dp_2}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (68.1)$$

Здесь вместо функции  $f_{ab}$  можно использовать квантовую корреляционную функцию  $g_{ab} = f_{ab} - f_a f_b$ , так как функции  $f_a$ ,  $f_b$  не зависят от координат.

Для однокомпонентного газа выражение (68.1) соответствует классическому выражению (10.9). При сопоставлении следует учитывать соотношения (66.5) между классическими и квантовыми функциями распределения.

Для идеального газа выражение для двухчастичной квантовой функции распределения следует из (66.21), если учесть связь функций  $f_{ab}$ ,  $\rho_{ab}$ , которая аналогична соотношению (66.1). Таким образом, для модели парных столкновений в нулевом приближении по запаздыванию функция  $f_{ab}$  определяется выражением

$$\begin{aligned} \hat{f}_{ab}(r_1, p_1, r_2, p_2, t) = & \\ = \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{v}_1 d\mathbf{p}'_1 d\mathbf{v}_2 d\mathbf{p}'_2 \exp(-i\mathbf{v}_1 \mathbf{p}_1 - i\mathbf{v}_2 \mathbf{p}_2) \times & \\ \times \Psi_{p'_1 p'_2}^*(r_1 + 1/2\hbar\mathbf{v}_1, r_2 + 1/2\hbar\mathbf{v}_2) \times & \\ \times \Psi_{p'_1 p'_2}^*(r_1 - 1/2\hbar\mathbf{v}_1, r_2 - 1/2\hbar\mathbf{v}_2) f_a(p'_1, t) f_b(p'_2, t). & \end{aligned} \quad (68.2)$$

Мы видим, что функция  $f_{ab}$  зависит от времени лишь через посредство одночастичных функций распределения  $f_a$ ,  $f_b$ .

Если подставить выражение (68.2) в (68.1), перейти к сферическим координатам и выполнить интегрирования, то получим квантовое выражение для интеграла столкновений Больцмана. Оно отличается от выражения (10.18) заменой классического эффективного сечения (10.20) на квантовое эффективное сечение [13].

### § 69. Приближение теории возмущений

В § 13 было показано, что кинетическое уравнение для неидеального газа в приближении теории возмущений может быть получено двумя способами. Можно либо производить разложение по взаимодействию непосредственно в интеграле столкновений Больцмана, либо использовать соответствующее уравнение для корреляционной функции  $g_{ab}$ . Оба способа возможны, естественно, и в квантовой теории.

Уравнение для корреляционной матрицы плотности в приближении теории возмущений следует из уравнения (66.10) и имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial g_{ab}}{\partial t} + \left[ \frac{\hbar^2}{2m_a} (\Delta_{r'_1} - \Delta_{r''_1}) + \frac{\hbar^2}{2m_b} (\Delta_{r'_2} - \Delta_{r''_2}) \right] g_{ab} = \\ = [\Phi_{ab}(|r'_1 - r'_2|) - \Phi_{ab}(|r''_1 - r''_2|)] \rho_a(r'_1, r''_1, t) \rho_b(r'_2, r''_2, t). \quad (69.1)$$

Оно соответствует классическому уравнению (13.1).

Подставим сюда разложение (66.15) для функции  $g_{ab}$  по собственным функциям нулевого приближения по взаимодействию (по функциям (66.14)). В результате для функции  $g_{ab}(p'_1, p'_2, p''_1, p''_2, t)$  получим следующее уравнение:

$$\left[ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - (E_{p'_1 p'_2} - E_{p''_1 p''_2}) \right] g_{ab}(p'_1, p'_2, p''_1, p''_2, t) = \\ = A(p'_1, p'_2, p''_1, p''_2, t), \quad E_{p_1 p_2} = \frac{p_1^2}{2m_a} + \frac{p_2^2}{2m_b}. \quad (69.2)$$

Здесь введено обозначение

$$A = \int [\Phi_{ab}(|r'_1 - r'_2|) - \Phi_{ab}(|r''_1 - r''_2|)] \rho_a(r'_1, r''_1, t) \rho_b(r'_2, r''_2, t) \times \\ \times \exp[i(r''_1 p'_1 + r''_2 p''_2)/\hbar] \exp[-i(r'_1 p'_1 + r'_2 p'_2)/\hbar] \times \\ \times \frac{1}{V^2} dr'_1 dr'_2 dr''_1 dr''_2. \quad (69.3)$$

При пространственно однородном распределении частиц

$$\rho_a(r'_1, r''_1, t) = \rho_a(r'_1 - r''_1, t) = \\ = \int f_a(p_1, t) \exp[i(r'_1 - r''_1) p_1/\hbar] \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} dp_1. \quad (69.4)$$

Используя это равенство, разложим в (69.3) функцию  $\Phi_{ab}(r)$  в интеграл Фурье и выполним интегрирования по всем координатам.

В результате получим, что

$$A = (2\pi\hbar)^3 v_{ab} \left( \frac{|p'_1 - p''_1|}{\hbar} \right) \delta(p'_1 + p'_2 - p''_1 - p''_2) \times \\ \times [f_a(p''_1, t) f_b(p''_2, t) - f_a(p'_1, t) f_b(p'_2, t)], \quad (69.5)$$

$$v_{ab}(k) = \int \Phi_{ab}(|r|) \exp(-ikr) dr. \quad (69.6)$$

Запишем решение уравнения (69.2) при условии полного ослабления начальных корреляций:

$$g_{ab}(p'_1, p'_2, p''_1, p''_2, t) = \\ = -i \int_0^\infty \exp[-i(E_{p'_1 p'_2} - E_{p''_1 p''_2})\tau/\hbar] A(p'_1, p'_2, p''_1, p''_2, t - \tau) \frac{d\tau}{\hbar}. \quad (69.7)$$

Преобразуем выражение (66.8)<sub>2</sub> для интеграла столкновений. Подставим в (66.8)<sub>2</sub> разложение (66.15) для функции  $g_{ab}$  по собственным функциям (66.14), разложим функцию  $\Phi_{ab}(|r|)$  в интеграл Фурье и выполним возможные интегрирования. В результате получим выражение

$$I_a(p_1, t) = \frac{2}{\hbar} \sum_b \frac{N_b}{V} \int v_{ab} \left( \left| \frac{p_1 - p'_1}{\hbar} \right| \right) \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \times \\ \times \text{Im } g_{ab}(p'_1, p'_2, p_1, p_2, t) \frac{dp'_1 dp'_2 dp_2}{(2\pi\hbar)^6}. \quad (69.8)$$

Из (69.8), (69.7), (69.5) находим искомое выражение для интеграла столкновений неидеального газа в приближении теории возмущений

$$I_a(p_1, t) = \frac{2}{\hbar} \sum_b N_b \int_0^\infty \int v_{ab}^2 \left( \frac{|p_1 - p'_1|}{\hbar} \right) \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \times \\ \times \cos[(E_{p_1 p_2} - E_{p'_1 p'_2})\tau/\hbar] [f_a(p'_1, t - \tau) f_b(p'_2, t - \tau) - \\ - f_a(p_1, t - \tau) f_b(p_2, t - \tau)] \frac{d\tau}{\hbar} \frac{dp'_1 dp'_2 dp_2}{(2\pi\hbar)^6}. \quad (69.9)$$

В первом приближении по запаздыванию это выражение снова можно представить в виде суммы двух частей

$$I_a(p_1, t) = I_{a1} + I_{a2}, \quad (69.10)$$

где

$$I_{a1} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_b N_b \int v_{ab}^2 \left( \frac{|p_1 - p'_1|}{\hbar} \right) \delta \left( \frac{p_1^2}{2m_a} + \frac{p_2^2}{2m_b} - \frac{p_1'^2}{2m_a} - \frac{p_2'^2}{2m_b} \right) \times \\ \times \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) [f_a(p'_1, t) f_b(p'_2, t) - f_a(p_1, t) f_b(p_2, t)] \times \\ \times \frac{dp'_1 dp'_2 dp_2}{(2\pi\hbar)^6} \quad (69.11)$$

— интеграл столкновений для идеального газа в приближении теории возмущений. Это выражение впервые было получено в работе Боголюбова и Гурова [11]. Интеграл  $I_{a2}$  определяется выражением

$$I_{a2} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{2}{\hbar} \sum_b N_b \int_0^\infty \int v_{ab}^2 \left( \frac{|p_1 - p'_1|}{\hbar} \right) \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \times \\ \times \cos \left[ (E_{p_1 p_2} - E_{p'_1 p'_2}) \frac{\tau}{\hbar} \right] [f_a(p'_1, t) f_b(p'_2, t) - \\ - f_a(p_1, t) f_b(p_2, t)] \frac{\tau d\tau}{\hbar} \frac{dp'_1 dp'_2 dp_2}{(2\pi\hbar)^6}. \quad (69.12)$$

Это выражение учитывает вклад взаимодействия в недиссипативные характеристики газа, т. е. неидеальность системы.

В классическом приближении полученные здесь квантовые формулы для  $I_{a1}$ ,  $I_{a2}$  совпадают для однокомпонентного газа с выражениями (13.12), (13.13).

## § 70. Квантовый интеграл столкновений Больцмана для неидеального газа с учетом обменных эффектов

В кинетической теории неидеальных газов и плазмы даже при высоких температурах, когда нет вырождения, обменные эффекты могут играть существенную роль. Это связано с тем, что вклад взаимодействия на малых расстояниях в недиссипативные характеристики является существенным. На малых расстояниях существенными являются и обменные эффекты.

Как и выше, будем рассматривать разреженный пространственно однородный газ. В приближении парных столкновений без учета обменных эффектов свойства газа описываются системой уравнений (66.7), (66.10) для квантовой функции распределения  $f_a(p, t)$  и для двухчастичной матрицы плотности  $\rho_{ab}(r'_1, r''_1, r'_2, r''_2, t)$ .

Запишем соответствующие уравнения с учетом зависимости от спиновых переменных, т. е. для функций [6]

$$f_a(\sigma'_1, \sigma''_1, \mathbf{p}_1, t), \rho_{ab}(\sigma'_1, \sigma'_2, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \sigma''_1, \sigma''_2, \mathbf{r}''_1, \mathbf{r}''_2, t): \quad (70.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_a}{\partial t}(\sigma'_1, \sigma''_1, \mathbf{p}_1, t) &= \frac{i}{\hbar} \sum_{b, \sigma_2} N_b \int [\Phi_{ab}(|\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}_2|) - \Phi_{ab}(|\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_2|)] \times \\ &\times \rho_{ab}(\sigma'_1, \sigma''_1, \sigma_2, \sigma_2, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}''_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, t) \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}''_1) \mathbf{p}_1\right] \times \\ &\times \frac{d\mathbf{r}'_1 d\mathbf{r}''_1 d\mathbf{r}_2}{V^3} \equiv I_a(\sigma'_1, \sigma''_1, \mathbf{p}_1, t), \quad (70.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \left[ \frac{\hbar^2}{2m_a} (\Delta_{r'_1} - \Delta_{r''_1}) + \frac{\hbar^2}{2m_b} (\Delta_{r'_2} - \Delta_{r''_2}) \right] - [\Phi_{ab}(|\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2|) - \right. \\ \left. - \Phi_{ab}(|\mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}''_2|)] \right\} \rho_{ab}(\sigma'_1, \sigma''_1, \sigma'_2, \sigma''_2, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}''_1, \mathbf{r}'_2, \mathbf{r}''_2, t) = \\ = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \int \left\{ f_a(\sigma'_1, \sigma''_1, \mathbf{p}_1, t) f_b(\sigma'_2, \sigma''_2, \mathbf{p}_2, t) \times \right. \\ \times \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}''_1) \mathbf{p}_1 + \frac{i}{\hbar}(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}''_2) \mathbf{p}_2\right] \pm \\ \pm f_a(\sigma'_1, \sigma''_2, \mathbf{p}_1, t) f_b(\sigma'_2, \sigma''_1, \mathbf{p}_2, t) \times \\ \left. \times \delta_{ab} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}''_2) \mathbf{p}_1 + \frac{i}{\hbar}(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}''_1) \mathbf{p}_2\right] \right\} \left[ \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \right]^2 d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \equiv \\ \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{ab}^0(\sigma'_1, \sigma''_1, \sigma'_2, \sigma''_2, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}''_1, \mathbf{r}'_2, \mathbf{r}''_2, t). \quad (70.3) \end{aligned}$$

Здесь  $\rho_{ab}^0$  — двухчастичная матрица плотности за вычетом корреляционной матрицы, определяемой взаимодействием части. Правая часть уравнения (70.3) отличается от правой части уравнения (66.10) учетом корреляции, обусловленной обменными эффектами.

Верхний знак (знак +) в правой части уравнения (70.3) для частиц, подчиняющихся статистике Бозе, а нижний знак (знак —) — статистике Ферми.

Мы не будем рассматривать процессы, связанные с переходами частиц из одного спинового состояния в другое. Тогда зависимость от спиновых переменных в функциях (70.1) имеет вид

$$\begin{aligned} f_a(\sigma'_1, \sigma''_1, \mathbf{p}_1, t) &= \frac{1}{g_a} \delta_{\sigma'_1 \sigma''_1} f_a(\mathbf{p}_1, t), \\ \rho_{ab}(\sigma'_1, \sigma''_1, \sigma'_2, \sigma''_2, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}''_1, \mathbf{r}'_2, \mathbf{r}''_2, t) &= \\ &= \frac{1}{g_a g_b} \delta_{\sigma'_1 \sigma''_1} \delta_{\sigma'_2 \sigma''_2} \cdot \rho_{ab}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}''_1, \mathbf{r}'_2, \mathbf{r}''_2, t). \end{aligned} \quad (70.4)$$

Здесь  $g_a = 2S_a \pm 1$ , где  $S_a$  — величина спина в единицах  $\hbar$ .

Функции (70.1), (70.4) нормированы следующим образом:

$$\sum_{\sigma} \int \hat{f}_a(\sigma, \sigma, \mathbf{p}, t) \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} d\mathbf{p} = 1, \quad (70.5)$$

$$\sum_{\sigma_1 \sigma_2} \int \rho_{ab}(\sigma_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, t) \frac{d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2}{V^2} = 1.$$

Дальнейшие расчеты проводим по аналогии со сделанными в § 66. В результате получим выражение для двухчастичной матрицы плотности неидеального газа, которое аналогично выражению (66.19). В первом приближении по запаздыванию его можно представить в виде суммы двух частей

$$\rho_{ab} = \rho_{ab}^1 + \rho_{ab}^{(2)}, \quad (70.6)$$

где

$$\rho_{ab}^1 = \frac{V^4}{(2\pi\hbar)^6} \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \{ \Psi_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}(r'_1, r'_2) \Psi_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^*(r''_1, r''_2) f_a(\sigma'_1, \sigma''_1, \mathbf{p}_1, t) \times$$

$$\times \hat{f}_b(\sigma'_2, \sigma''_2, \mathbf{p}_2, t) \pm \delta_{ab} \Psi_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}(r'_1, r''_2) \times$$

$$\times \Psi_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^*(r'_2, r''_1) \hat{f}_a(\sigma'_1, \sigma''_2, \mathbf{p}_1, t) \hat{f}_b(\sigma'_2, \sigma''_1, \mathbf{p}_2, t) \}, \quad (70.7)$$

$$\rho_{ab}^{(2)} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} d\tau \int dq'_1 dq''_1 dq'_2 dq''_2 \tau \frac{d}{d\tau} A(-\tau) \times$$

$$\times \rho_{ab}^0(\sigma'_1, \sigma''_1, \sigma'_2, \sigma''_2, \mathbf{q}'_1, \mathbf{q}''_1, \mathbf{q}'_2, \mathbf{q}''_2, t). \quad (70.8)$$

В этих формулах  $A(-\tau)$  — матрица перехода. Она определяется выражением

$$A(-\tau) = \int \Psi_{\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2}(r'_1, r'_2) \Psi_{\mathbf{p}''_1 \mathbf{p}''_2}^*(r''_1, r''_2) \Psi_{\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2}^*(q'_1, q'_2, -\tau) \times$$

$$\times \Psi_{\mathbf{p}''_1 \mathbf{p}''_2}(q''_1, q''_2, -\tau) \left[ \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \right]^4 d\mathbf{p}'_1 d\mathbf{p}'_2 d\mathbf{p}''_1 d\mathbf{p}''_2. \quad (70.9)$$

Интеграл столкновений в первом приближении по запаздыванию также состоит из суммы двух частей

$$I_a(\sigma'_1, \sigma''_1, \mathbf{p}_1, t) = I_{a1} + I_{a2}. \quad (70.10)$$

Из (70.2), (70.7) следует, что

$$\begin{aligned}
 I_{a1} = & \frac{i}{\hbar} \frac{V^2}{(2\pi)^6 \hbar^3} \sum_{b\sigma_2} N_b \int [\Phi_{ab}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - 1/2\hbar\mathbf{v}|) - \\
 & - \Phi_{ab}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + 1/2\hbar\mathbf{v}|)] e^{-i\mathbf{v}\mathbf{p}_1} \left\{ \Psi_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}_2}(\mathbf{r}_1 + 1/2\hbar\mathbf{v}, \mathbf{r}_2) \times \right. \\
 & \times \Psi_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^*(\mathbf{r}_1 - 1/2\hbar\mathbf{v}, \mathbf{r}_2) f_a(\sigma'_1, \sigma''_1, \mathbf{p}'_1, t) f_b(\sigma_2, \sigma_2, \mathbf{p}_2, t) \pm \\
 & \pm \delta_{ab} \Psi_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}_2}(\mathbf{r}_1 + 1/2\hbar\mathbf{v}, \mathbf{r}_2) \Psi_{\mathbf{p}'_2\mathbf{p}_2}^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 - 1/2\hbar\mathbf{v}) \times \\
 & \left. \times f_a(\sigma'_1, \sigma_2, \mathbf{p}'_1, t) f_b(\sigma_2, \sigma''_1, \mathbf{p}_2, t) \right\} d\mathbf{v} d\mathbf{p}'_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{r}_2. \quad (70.11)
 \end{aligned}$$

Это — квантовый интеграл столкновений Больцмана с учетом обменных эффектов для идеального невырожденного газа.

Выражение  $I_{a2}$ , как и ранее, определяет вклад корреляций, которые теперь определяются не только взаимодействием, но и обменом, в недиссипативные характеристики газа. Оно получается при подстановке (70.8) в (70.2).

Если зависимость от спиновых переменных определяется выражениями (70.4), то от кинетического уравнения (70.2) можно перейти к более простому кинетическому уравнению

$$\frac{\partial f_a(\mathbf{p}_1, t)}{\partial t} = \sum_{\sigma_1} I_a(\sigma_1, \sigma_1, \mathbf{p}_1, t) \equiv I_a(\mathbf{p}_1, t). \quad (70.12)$$

Чтобы получить выражение для  $I_{a1}$ , надо подставить в правую часть формулы (70.11) выражения (70.4) для одночастичных функций распределения, выполнить суммирование по  $\sigma_1$  и использовать равенство

$$\sum_{\sigma_1\sigma_2} \frac{1}{g_a g_b} \delta_{\sigma'_1\sigma_2} \delta_{\sigma_2\sigma''_1} = \sum_{\sigma_1} \frac{1}{g_a} \frac{1}{g_b} \delta_{\sigma'_1\sigma''_1} = \frac{1}{g_b}.$$

В результате получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 I_{a1} = & \frac{i}{\hbar} \frac{V^2}{(2\pi)^6 \hbar^3} \sum_b N_b \int [\Phi_{ab}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - 1/2\hbar\mathbf{v}|) - \\
 & - \Phi_{ab}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + 1/2\hbar\mathbf{v}|)] e^{-i\mathbf{v}\mathbf{p}_1} \times \\
 & \times \left\{ \Psi_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}_2}(\mathbf{r}_1 + 1/2\hbar\mathbf{v}, \mathbf{r}_2) \Psi_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}_2}^*(\mathbf{r}_1 - 1/2\hbar\mathbf{v}, \mathbf{r}_2) \pm \right. \\
 & \left. \pm \frac{1}{g_a} \delta_{ab} \Psi_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}_2}(\mathbf{r}_1 + 1/2\hbar\mathbf{v}, \mathbf{r}_2) \Psi_{\mathbf{p}'_2\mathbf{p}_2}^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 - 1/2\hbar\mathbf{v}) \right\} f_a(\mathbf{p}'_1, t) \times \\
 & \times f_b(\mathbf{p}_2, t) d\mathbf{v} d\mathbf{p}'_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{r}_2. \quad (70.13)
 \end{aligned}$$

Без учета обмена это выражение совпадает с (66.22).

В приближении теории возмущений выражение (70.13) упрощается и принимает вид [16]

$$\begin{aligned}
 I_{a1} = & \frac{2\pi}{\hbar} \sum_b N_b \int \left[ v_{ab}^2 \left( \frac{|p_1 - p'_1|}{\hbar} \right) \pm \right. \\
 & \left. \pm \delta_{ab} \frac{1}{g_a} v_{ab} \left( \frac{|p_1 - p'_2|}{\hbar} \right) v_{ab} \left( \frac{|p_1 - p'_1|}{\hbar} \right) \right] \times \\
 & \times \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \delta \left( \frac{p_1^2}{2m_a} + \frac{p_2^2}{2m_b} - \frac{p'^2_1}{2m_a} - \frac{p'^2_2}{2m_b} \right) \times \\
 & \times [f_a(p'_1, t) f_b(p'_2, t) - f_a(p_1, t) f_b(p_2, t)] \frac{d p'_1 d p'_2 d p_2}{(2\pi\hbar)^6}. \quad (70.14)
 \end{aligned}$$

Без учета обменных эффектов это выражение совпадает с (69.11).

Для однокомпонентного газа бесспиновых частиц кинетическое уравнение с интегралом столкновений (70.14) совпадает с уравнением (10.41) книги Гурова [11].

Перейдем теперь к квантовой кинетической теории неидеальной плазмы. При расчете термодинамических функций неидеальной плазмы мы убедимся в значительной роли обменных эффектов для неидеальных систем.



## КВАНТОВЫЕ КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПЛАЗМЫ

### § 71. Оператор фазовой плотности

В §§ 4, 5 было показано, что в кинетической теории газов в качестве исходных вместо уравнения Лиувилля можно использовать уравнения для фазовой плотности в шестимерном пространстве координат и импульсов — уравнения (4.6), (4.7). Функции распределения  $f_1, f_2, \dots$  связаны с моментами случайной функции (§ 5).

Мы видели, что использование уравнения для фазовой плотности весьма эффективно в кинетической теории крупномасштабных флуктуаций в газах и особенно в кинетической теории плазмы.

В квантовой теории вместо фазовой плотности

$$N_a(x, t) = \sum_{1 \leq i \leq N_a} \delta(x - x_i(t)), \quad x = (\mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad (71.1)$$

для системы частиц с нулевым спином следует использовать оператор фазовой плотности

$$\hat{N}_a(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\rho}_a(\mathbf{r} + 1/2 \hbar \boldsymbol{\nu}, \mathbf{r} - 1/2 \hbar \boldsymbol{\nu}) \exp(-i \boldsymbol{\nu} \mathbf{p}) \frac{(2\pi \hbar)^3}{V} d\boldsymbol{\nu}. \quad (71.2)$$

Здесь

$$\frac{1}{V} \hat{\rho}_a(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', t) = \Psi_a^+(\mathbf{r}'', t) \Psi_a(\mathbf{r}', t) \quad (71.3)$$

— операторная матрица плотности  $\Psi_a^+, \Psi_a$  — квантованные волновые функции, удовлетворяющие перестановочным соотношениям [17]

$$\Psi_a(\mathbf{r}, t) \Psi_b^+(\mathbf{r}', t) \pm \Psi_b^+(\mathbf{r}', t) \Psi_a(\mathbf{r}, t) = \delta_{ab} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

$$\Psi_a(\mathbf{r}, t) \Psi_b(\mathbf{r}', t) \pm \Psi_b(\mathbf{r}', t) \Psi_a(\mathbf{r}, t) = 0,$$

$$\Psi_a^+(\mathbf{r}, t) \Psi_b^+(\mathbf{r}', t) \pm \Psi_b^+(\mathbf{r}', t) \Psi_a^+(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Знак плюс — для статистики Ферми и минус — для статистики Бозе.

Оператор Гамильтона для бесспиновых частиц выражается через  $\Psi^+$ ,  $\Psi$  следующим образом [17]:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & - \sum_a \frac{\hbar^2}{2m_a} \int \Psi_a^+(\mathbf{r}, t) \Delta_r \Psi(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{ab} \int \Phi_{ab}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \Psi_a^+(\mathbf{r}_1, t) \Psi_b^+(\mathbf{r}_2, t) \Psi_b(\mathbf{r}_2, t) \times \\ & \times \Psi_a(\mathbf{r}_1, t) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \end{aligned} \quad (71.4)$$

Выразим оператор Гамильтона через операторные матрицы плотности (71.3) и затем, используя соотношение (71.2), через оператор фазовой плотности. Если не учитывать спариваний, обусловленных обменом, то получим следующее выражение:

$$\hat{H} = \sum_a \int \frac{p^2}{2m_a} \hat{N}_a(x, t) \frac{dx}{(2\pi\hbar)^3} + \frac{1}{2} \sum_{ab} \int \Phi_{ab} \hat{N}_a(x, t) \hat{N}_b(x', t) \frac{dx dx'}{(2\pi\hbar)^6}. \quad (71.5)$$

Второй член правой части можно симметризовать по  $a, x; b, x'$ .

Выражение (71.5) для однокомпонентного газа соответствует классическому выражению (4.3). Как и в (4.3), здесь учтен член, определяющий вклад самовоздействия.

Уравнение для оператора фазовой плотности может быть получено с помощью известных уравнений для квантованных волновых функций  $\Psi^+$ ,  $\Psi$ . Используя эти уравнения и определение (71.2) при отсутствии внешних полей, получим следующее уравнение [18]:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \hat{N}_a(x, t) - \frac{i}{\hbar} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_b \int [\Phi_{ab}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - 1/2\hbar\mathbf{v}|) - \\ - \Phi_{ab}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}' + 1/2\hbar\mathbf{v}|)] \hat{N}_b(x', t) \hat{N}_a(\mathbf{r}, \boldsymbol{\eta}, t) \times \\ \times \exp i\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{p}) d\boldsymbol{\nu} d\boldsymbol{\eta} \frac{d\mathbf{r}' d\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3} = 0. \end{aligned} \quad (71.6)$$

Это уравнение соответствует классическому уравнению (4.7).

Введем оператор потенциальной энергии частицы

$$\hat{U}_a(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{h}} \int \Phi_{ab}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \hat{N}_b(x', t) \frac{dx'}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (71.7)$$

Тогда уравнение (71.6) можно записать в другой форме [18]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r}\right) \hat{N}_a(x, t) - \frac{i}{\hbar} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int [U_a(\mathbf{r} - 1/2\hbar\mathbf{v}) - U_a(\mathbf{r} + 1/2\hbar\mathbf{v})] \times \\ \times \hat{N}_a(\mathbf{r}, \boldsymbol{\eta}, t) \exp[i\mathbf{v}(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{p})] d\mathbf{v} d\boldsymbol{\eta} = 0. \quad (71.8)$$

Это уравнение соответствует классическому уравнению (4.6).

Используя определение (71.7), запишем оператор Гамильтона в виде

$$\hat{H} = \sum_a \int \left(\frac{p^2}{2m_a} + U_{a0}\right) \hat{N}_a(x, t) \frac{dx}{(2\pi\hbar)^3} + \\ + \frac{1}{2} \sum_a \int U_a(\mathbf{r}, t) \hat{N}_a(x, t) \frac{dx}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (71.9)$$

Это выражение можно использовать и при учете обмена, если вместо (71.7) использовать более общее выражение для оператора потенциальной энергии бесспиновых частиц

$$\hat{U}_a(x, t) = \sum_b \int [\Phi_{ab}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \mp \\ \mp \delta_{ab} v_{aa} \left(\frac{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|}{\hbar}\right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \hat{N}_a(x', t) \frac{dx'}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (71.10)$$

Верхний знак соответствует статистике Ферми, а нижний — статистике Бозе.

Выражения (71.9), (71.10) совпадают с (36) работы [18]. Чтобы получить выражение (71.9) с (71.10), надо в (71.4) учесть все возможные спаривания вида  $\Psi + \Psi$ .

Если рассматривать систему частиц со спином, но не учитывать переходы между различными спиновыми состояниями (см. § 70), то вместо (71.10) надо использовать выражение

$$\hat{U}_a(x, t) = \sum_b \int [\Phi_{ab}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \mp \\ \mp \frac{1}{g_a} \delta_{ab} v_{aa} \left(\frac{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|}{\hbar}\right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \hat{N}_b(x', t) \frac{dx'}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (71.11)$$

где  $g_a = 2S_a + 1$ .

Таким образом, при учете обмена потенциал взаимодействия  $\Phi_{ab}$  заменяется потенциалом

$$\Phi_{ab}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \mp \delta_{ab} \frac{1}{g_a} v_{aa} \left(\frac{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|}{\hbar}\right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (71.12)$$

При учете обмена вместо уравнения (71.8) следует использовать более общее уравнение, соответствующее гамильтониану

(71.9) с (71.10) или (71.11). Усложнение обусловлено тем, что потенциальная энергия, соответствующая оператору  $\hat{U}_a$ , зависит теперь не только от координат, но и от импульса. С учетом этого вместо (71.8) получим следующее уравнение:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \hat{N}_a(x, t) - \frac{i}{\hbar} \frac{1}{(2\pi)^6} \int [\hat{U}_a(\mathbf{r} - 1/2\hbar\mathbf{v}, \mathbf{p} + 1/2\hbar\boldsymbol{\theta}) - \hat{U}_a(\mathbf{r} + 1/2\hbar\mathbf{v}, \mathbf{p} - 1/2\hbar\boldsymbol{\theta})] \exp[i\mathbf{v}(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{p}) + i\boldsymbol{\theta}(\mathbf{q} - \mathbf{r})] \hat{N}_a(\mathbf{q}, \boldsymbol{\eta}, t) d\mathbf{v} d\boldsymbol{\eta} d\boldsymbol{\theta} d\mathbf{q} = 0. \quad (71.13)$$

Для системы частиц, подчиняющихся статистике Ферми, можно использовать более простое уравнение, если импульсы частиц мало отличаются от граничного импульса. Оно следует из (71.13) при разложении по  $\hbar\mathbf{v}$ ,  $\hbar\boldsymbol{\theta}$  и имеет вид классического уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \left(\mathbf{v} + \frac{\partial \hat{U}_a}{\partial \mathbf{p}}\right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \hat{U}_a}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right) \hat{N}_a(x, t) = 0 \quad (71.14)$$

с оператором потенциальной энергии (71.11).

Для случая короткодействующих сил в (71.11) можно потенциал  $\Phi_{ab}$  задавать в виде

$$\Phi_{ab}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = v(0) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (71.15)$$

Такое приближение используется в теории ферми-жидкости [19, 20].

## § 72. Уравнения для моментов

Перейдем от операторных уравнений (71.6), (71.8) к цепочке уравнений для моментов. Будем обозначать чертой усреднение по распределению чисел заполнения [17]. Тогда

$$\overline{\hat{N}_a}(x, t) = N_a f_a(x, t). \quad (72.1)$$

Здесь  $f_a$  — одночастичная квантовая функция распределения. Она связана с одночастичной матрицей плотности равенством (66.1).

Для второго момента без учета обмена получим следующее выражение (знак  $\wedge$  над  $N$  опускаем):

$$\begin{aligned} \overline{N_a(x, t) N_b(x', t)} &= (N_a N_b - \delta_{ab} N_a) f_{ab}(x, x', t) + \\ &+ \delta_{ab} N_a (2\pi\hbar)^3 \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{v} d\boldsymbol{\eta} d\mathbf{v}' d\boldsymbol{\eta}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}' + \frac{1}{2}\hbar(\mathbf{v} + \mathbf{v}')) \times \\ &\times \delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}') f_a\left(\frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}' - \hbar(\mathbf{v} - \mathbf{v}')/2}{2}, \boldsymbol{\eta}, t\right) \times \\ &\times \exp[i\mathbf{v}(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{p}) + i\mathbf{v}'(\boldsymbol{\eta}' - \mathbf{p}')], \quad (72.2) \end{aligned}$$

где  $f_{ab}$  — двухчастичная квантовая функция распределения. В классическом пределе это выражение принимает вид

$$\overline{N_a(x, t) N_b(x', t)} = (N_a N_b - \delta_{ab} N_a) f_{ab} + N_a \delta_{ab} \delta(x - x') (2\pi\hbar)^3 f_a(x, t). \quad (72.3)$$

Это выражение (с учетом соотношений (66.5)) совпадает для однокомпонентной системы с равенством (5.2).

Для пространственно однородного газа выражение (72.2) упрощается и принимает вид

$$\overline{N_a(x, t) N_b(x', t)} = (N_a N_b - \delta_{ab} N_a) f_{ab} + N_a \delta_{ab} (2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}' + 1/2 \hbar \mathbf{v}) \times \\ \times \exp[i\mathbf{v}(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{p})] f_a(\boldsymbol{\eta}, t) d\mathbf{v} d\boldsymbol{\eta}. \quad (72.4)$$

Из выражений (72.2), (72.4) следуют соотношения между вторым центральным моментом и квантовой корреляционной функцией. Например, для пространственно однородного распределения из (72.4) находим

$$(\delta N_a \delta N_b)_{x, x', t} = (N_a N_b - \delta_{ab} N_a) g_{ab} + N_a \delta_{ab} \left[ (2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}' + 1/2 \hbar \mathbf{v}) \times \right. \\ \left. \times \exp[i\mathbf{v}(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{p})] f_a(\boldsymbol{\eta}, t) d\mathbf{v} d\boldsymbol{\eta} - f_a(x, t) f_b(x', t) \right]. \quad (72.5)$$

В классическом пределе это выражение совпадает с выражением (26.10). При сопоставлении снова надо учесть соотношения (66.5).

При учете обменных эффектов в выражениях (72.2), (72.4) появятся дополнительные члены. Не будем их выписывать, так как в дальнейшем они нам не понадобятся.

Усреднение уравнений (71.8), (71.13) приводит, как и в классической теории, к системе зацепляющихся уравнений для моментов. В приближении первых моментов из (71.13), (71.11) получим квантовую систему уравнений с самосогласованным полем для функций распределения  $f_a$  и функции  $U_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ . Так, например, для ферми-системы из (71.14), (71.11) получаем следующую систему самосогласованных уравнений:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \mathbf{v} + \frac{\partial U_a}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial U_a}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right] f_a(x, t) = 0, \quad (72.6)$$

$$U_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_b N_b \int \left[ \Phi_{ab}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) - \delta_{ab} \frac{1}{g_a} v_{aa} \left( \frac{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|}{\hbar} \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] f_b(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t) \frac{d\mathbf{r}' d\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Уравнения такого рода лежат в основе теории ферми-жидкости Ландау [19, 20].

Уравнения с самосогласованным полем не учитывают вклада флуктуаций и поэтому не описывают диссипативные процессы.

### § 73. Поляризационное приближение

При описании процессов в поляризационном приближении можно исходить из уравнений, аналогичных классическим уравнениям (27.7). Они, как это видно из уравнения (71.8), имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{L}_a(\delta N_a(x, t) - \delta N_a^{\text{нст}}(x, t)) = \\ = \frac{i}{\hbar} \frac{N_a}{(2\pi)^3} \int [\delta U_a(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\hbar\mathbf{v}) - \delta U_a(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\hbar\mathbf{v})] f_a(\mathbf{r}, \boldsymbol{\eta}, t) \times \\ \times \exp[i\mathbf{v}(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{p})] d\mathbf{v} d\boldsymbol{\eta}. \end{aligned} \quad (73.1)$$

Здесь использовано обозначение для оператора

$$\begin{aligned} \hat{L}_a A(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) A(\mathbf{r}, \mathbf{p}) - \frac{i}{\hbar} \frac{1}{(2\pi)^3} \int [U_a(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\hbar\mathbf{v}) - \\ - U_a(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\hbar\mathbf{v})] A(\mathbf{r}, \boldsymbol{\eta}) \exp[i\mathbf{v}(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{p})] d\mathbf{v} d\boldsymbol{\eta}, \end{aligned} \quad (73.2)$$

где  $U_a$  — потенциальная энергия частицы.

При  $\hbar \rightarrow 0$  (с учетом (66.5)) уравнения (73.1), (73.2) совпадают с (27.7).

К уравнению (73.1) надо добавить уравнение, связывающее флуктуации  $\delta U_a$ ,  $\delta N_a$ . Без учета обменных эффектов это уравнение следует из (71.7) и имеет вид

$$\delta U_a(\mathbf{r}, t) = \sum_b \int \Phi_{ab}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \delta N_b(x', t) \frac{dx'}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (73.3)$$

Двухвременная корреляция флуктуаций источника  $\delta N_a^{\text{нст}}$  определяется уравнением, аналогичным классическому уравнению (27.8):

$$\hat{L}_a^0 \overline{(\delta N_a \delta N_b)_{x, t, x', t'}^{\text{нст}}} = 0. \quad (73.4)$$

Начальное условие для этого уравнения следует из выражений для одновременной корреляции  $\overline{(\delta N_a \delta N_b)_{x, x', t}}$  при  $g_{ab} = 0$ . Так, например, для пространственно однородной плазмы из (72.5) следует, что

$$\begin{aligned} \overline{(\delta N_a \delta N_b)_{x, t, x', t'}^{\text{нст}}} \Big|_{t=t'} = N_a \delta_{ab} \left[ (2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \frac{1}{(2\pi)^3} \times \right. \\ \left. \times \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}' + \frac{1}{2}\hbar\mathbf{v}) \exp[i\mathbf{v}(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{p})] f_a(\boldsymbol{\eta}, t) d\mathbf{v} d\boldsymbol{\eta} - \right. \\ \left. - f_a(x, t) f_b(x', t) \right]. \end{aligned} \quad (73.5)$$

В предельном случае  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  второй член правой части с  $f_a f_b$  может быть опущен.

При  $\hbar \rightarrow 0$  выражение (73.5) совпадает с (27.9).

#### § 74. Квантовый интеграл столкновений в поляризационном приближении

На основе уравнений (73.1)—(73.4) можно произвести расчет спектральной плотности флуктуаций  $\delta N_a$ ,  $\delta U_a$ . Поскольку расчеты подобны проведенным в §§ 34—37, то приведем сразу некоторые результаты.

Для идеальной плазмы, т. е. без учета запаздывания и пространственной неоднородности одночастичных функций распределения  $f_a$ , выражение для спектральной плотности флуктуаций поля имеет вид

$$(\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}} = \pi \hbar \frac{V}{(2\pi \hbar)^3} \sum_a \frac{(4\pi)^2 e_a^2 n_a}{k^2 |\epsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} \int d\mathbf{p}' d\mathbf{p}'' \delta(\hbar \mathbf{k} - (\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')) \times \\ \times \delta(\hbar \omega - (\mathbf{p}'^2/2m_a - \mathbf{p}''^2/2m_a)) (f_a(\mathbf{p}', t) + f_a(\mathbf{p}'', t)). \quad (74.1)$$

Здесь  $\epsilon(\omega, \mathbf{k})$  — диэлектрическая проницаемость с учетом квантовых эффектов. Она определяется выражением

$$\epsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum_a \frac{4\pi e_a^2 n_a}{k^2} \frac{V}{(2\pi \hbar)^3} \int d\mathbf{p}' d\mathbf{p}'' \delta(\hbar \mathbf{k} - (\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')) \times \\ \times \frac{f_a(\mathbf{p}', t) - f_a(\mathbf{p}'', t)}{\hbar(\omega + i\Delta) - (\mathbf{p}'^2/2m_a - \mathbf{p}''^2/2m_a)}. \quad (74.2)$$

При  $\hbar \rightarrow 0$  выражения (74.1), (74.2) совпадают с классическими выражениями (35.6), (35.5).

В равновесном состоянии выражение (74.1) для спектральной плотности поля принимает вид

$$(\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{8\pi}{\omega} \frac{\text{Im } \epsilon(\omega, \mathbf{k})}{|\epsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} \left( \frac{1}{2} \hbar \omega + \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega / \kappa T} - 1} \right) \quad (74.3)$$

и совпадает с известным выражением теории равновесных электромагнитных флуктуаций [21].

Запишем выражение для мнимой части диэлектрической проницаемости, которое следует из (74.2):

$$\text{Im } \epsilon(\omega, \mathbf{k}) = - \sum_a \frac{4\pi^2 e_a^2 n_a}{k^2} \frac{V}{(2\pi \hbar)^3} \int d\mathbf{p}' d\mathbf{p}'' \delta(\hbar \mathbf{k} - (\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')) \times \\ \times \delta(\hbar \omega - (\mathbf{p}'^2/2m_a - \mathbf{p}''^2/2m_a)) (f_a(\mathbf{p}', t) - f_a(\mathbf{p}'', t)). \quad (74.4)$$

Квантовый интеграл столкновений можно, как и в классической теории (см. § 37), выразить через функции  $(\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}}$ ,  $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ . Прежде чем приводить соответствующее выражение, запишем уравнение для одночастичной функции распределения  $f_a$ . Оно получается усреднением уравнения (71.8). Используя обозначение (73.2), запишем его в виде

$$\hat{L}_a f_a = I_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t). \quad (74.5)$$

Здесь введено обозначение для квантового интеграла столкновений

$$I_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{t}{\hbar} \frac{1}{(2\pi)^3} \int [(\delta U_a \delta N_a)_{r-\frac{1}{2}\hbar\mathbf{v}; \mathbf{r}, \mathbf{v}, t} - (\delta U_a \delta N_a)_{r+\frac{1}{2}\hbar\mathbf{v}; \mathbf{r}, \mathbf{v}, t}] \exp[i\mathbf{v}(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{p})] d\mathbf{v} d\boldsymbol{\eta}. \quad (74.6)$$

Таким образом, интеграл столкновений определяется корреляцией флуктуаций  $\delta N_a$ ,  $\delta U_a$ . Квантовый интеграл столкновений можно выразить через спектральную плотность  $(\delta N_a \delta U_a)_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}}$ . Для определения этой спектральной плотности следует произвести расчеты, аналогичные классическим расчетам, проведенным в §§ 36, 37. В результате для идеальной плазмы получим следующее выражение для квантового интеграла столкновений:

$$I_a(\mathbf{p}, t) = \frac{e_a^2}{(2\pi)^3 \hbar} \int d\mathbf{p}' d\omega d\mathbf{k} \frac{1}{k^2} \delta(\hbar\mathbf{k} - (\mathbf{p} - \mathbf{p}')) \delta(\hbar\omega - \left(\frac{p^2}{2m_a} - \frac{p'^2}{2m_a}\right)) \{(\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}} (f_a(\mathbf{p}', t) - f_a(\mathbf{p}, t)) - \frac{4\pi\hbar \operatorname{Im} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} (f_a(\mathbf{p}', t) + f_a(\mathbf{p}, t))\}. \quad (74.7)$$

В равновесном состоянии интеграл столкновений обращается в нуль. В этом нетрудно убедиться, если подставить в (74.7) распределение Максвелла для функций  $f_a$ , учесть, что в равновесном состоянии

$$\delta\left(\hbar\omega - \left(\frac{p^2}{2m_a} - \frac{p'^2}{2m_a}\right)\right) \frac{1}{2} \frac{f_a(\mathbf{p}') + f_a(\mathbf{p})}{f_a(\mathbf{p}') - f_a(\mathbf{p})} = \delta\left(\hbar\omega - \left(\frac{p^2}{2m_a} - \frac{p'^2}{2m_a}\right)\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}\right), \quad (74.8)$$

и использовать равенство (74.3).

В классическом пределе выражение (74.7) совпадает с интегралом столкновений Балеску — Ленарда в форме (37.2).

Квантовый интеграл столкновений можно записать в форме, аналогичной (37.1). Для этого надо подставить выражения



(74.1), (74.4) для спектральной плотности флуктуаций поля и мнимой части диэлектрической проницаемости в (74.7). В результате получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 I_a(\mathbf{p}_1, t) = & \sum_b 4e_a^2 e_b^2 n_b \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p}'_1 d\mathbf{p}'_2 d\mathbf{p}_2 d\omega d\mathbf{k} \times \\
 & \times \delta(\hbar\mathbf{k} - (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)) \delta\left(\hbar\omega - \left(\frac{p_1^2}{2m_a} - \frac{p_1'^2}{2m_a}\right)\right) \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2) \times \\
 & \times \delta\left(\frac{p_1'}{2m_a} + \frac{p_2'}{2m_b} - \frac{p_1'^2}{2m_a} - \frac{p_2'^2}{2m_b}\right) \frac{1}{k^1 |\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} [f_a(\mathbf{p}'_1, t) f_b(\mathbf{p}'_2, t) - \\
 & - f_a(\mathbf{p}_1, t) f_b(\mathbf{p}_2, t)]. \quad (74.9)
 \end{aligned}$$

В этом выражении можно выполнить интегрирование по  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ . После этого оно примет вид

$$\begin{aligned}
 I_a(\mathbf{p}_1, t) = & \sum_b 4\pi e_a^2 e_b^2 n_b \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p}'_1 d\mathbf{p}'_2 d\mathbf{p}_2 \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2) \times \\
 & \times \delta\left(\frac{p_1'}{2m_a} + \frac{p_2'}{2m_b} - \frac{p_1'^2}{2m_a} - \frac{p_2'^2}{2m_b}\right) \times \\
 & \times \left[ (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)^4 \left| \varepsilon\left(\left(\frac{p_1^2}{2m_a} - \frac{p_1'^2}{2m_a}\right)/\hbar, (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)/\hbar\right) \right|^2 \right]^{-1} \times \\
 & \times [f_a(\mathbf{p}'_1, t) f_b(\mathbf{p}'_2, t) - f_a(\mathbf{p}_1, t) f_b(\mathbf{p}_2, t)]. \quad (74.10)
 \end{aligned}$$

Интеграл столкновений в такой форме был впервые получен в работах Силина [8] и Балеску [7].

Сравним выражение (74.10), полученное в поляризационном приближении, с выражением (69.11) для квантового интеграла столкновений, полученным в приближении теории возмущений. Для этого надо в выражении (69.11) положить  $v_{ab}(\mathbf{k}) = 4\pi e_a e_b / k^2$ , что соответствует взаимодействию частиц по закону Кулона. Тогда, как легко видеть, отличие будет состоять в том, что в (74.10) имеется множитель  $1/|\varepsilon(\dots)|^2$ , который и описывает влияние поляризации среды. Поскольку аргументы диэлектрической проницаемости в (74.10) зависят от импульсов, то поляризацию можно назвать динамической.

Удобна еще одна форма записи выражения (74.10). Введем под интегралом в (74.10) новые переменные:  $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2 = \hbar\mathbf{k}$ ,  $1/2(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}'_2) = \mathbf{p}$ . Отсюда

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p} + 1/2\hbar\mathbf{k}, \quad \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p} - 1/2\hbar\mathbf{k}. \quad (74.11)$$

Выражение (74.10) тогда примет вид

$$I_a(p_1, t) = \sum_b \frac{4\pi e_a^2 e_b^2 n_b}{\hbar} \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int dp'_1 dp dk \delta(p_1 - p'_1 - \hbar k) \times \\ \times \delta\left(\frac{p_1^2}{2m_a} - \frac{p'^2_1}{2m_a} - \hbar kv\right) \frac{1}{k^4 |\varepsilon(kv, k)|^2} \times \\ \times [f_a(p'_1, t) f_b(p - 1/2\hbar k, t) - f_a(p, t) f_b(p + 1/2\hbar k, t)]. \quad (74.12)$$

Мы видим, что при учете поляризации в квантовом интеграле столкновений, так же как и в классической теории, в функции взаимодействия, входящей через корреляционную функцию, происходит замена

$$v_{ab}(k) \rightarrow v_{ab}(k) / |\varepsilon(kv, k)|^2 \quad (74.13)$$

Эффекты поляризации сказываются на больших расстояниях между частицами (порядка  $r_D$ ). На малых расстояниях взаимодействие частиц в квантовом интеграле столкновений учитывается в приближении теории возмущений (борновское приближение). Мы говорили уже о том, что при построении кинетической теории неидеальной плазмы надо использовать интеграл столкновений, в котором учитываются и поляризационные эффекты и вклад сильных взаимодействий.

Однако одновременный учет сильных взаимодействий и эффектов поляризации очень сложен. Вследствие этого, как и в классической теории (§§ 55, 56), мы ограничимся учетом усредненного вклада динамической поляризации.

## § 75. Эффективный потенциал. Псевдопотенциал

Замена (74.13), отвечающая учету поляризации плазмы в квантовом кинетическом уравнении, аналогична замене (47.1) в классической теории.

Напомним, что в классической теории эффективный потенциал, учитывающий усредненную динамическую поляризацию, определяется эквивалентными выражениями (47.2), (47.5). Определение (47.5) по форме записи является более общим и может быть принято в качестве определения эффективного потенциала и в квантовой теории. Таким образом,

$$\bar{v}_{ab}(k) = \frac{e_a e_b}{\sum_c e_c^2 n_c} \frac{(\delta E \delta E)_{k, t}}{4\pi}. \quad (75.1)$$

Выражение для пространственной спектральной плотности флуктуаций поля следует из (74.1) и имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \delta E \delta E \rangle_{\mathbf{k}, t} &= \\ &= \sum_a \frac{8\pi^2 e_a^2 n_a}{k^2} \int \frac{\delta(\hbar\mathbf{k} - (\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')) (f_a(\mathbf{p}', t) + f_a(\mathbf{p}'', t))}{\left| \varepsilon \left( \frac{\mathbf{p}'^2}{2m_a\hbar} - \frac{\mathbf{p}''^2}{2m_a\hbar}, \mathbf{k} \right) \right|^2} \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} d\mathbf{p}' d\mathbf{p}'' \end{aligned} \quad (75.2)$$

Под интегралом здесь можно ввести переменные  $\mathbf{p}' - \mathbf{p}'' = \hbar\mathbf{k}'$ ,  $1/2(\mathbf{p}' + \mathbf{p}'') = \mathbf{p}$  и проинтегрировать по  $\mathbf{k}'$ . В результате

$$\begin{aligned} \langle \delta E \delta E \rangle_{\mathbf{k}, t} &= \\ &= \sum_a \frac{8\pi^2 e_a^2 n_a}{k^2} \int \frac{f_a(\mathbf{p} + 1/2\hbar\mathbf{k}, t) + f_a(\mathbf{p} - 1/2\hbar\mathbf{k}, t)}{|\varepsilon(\mathbf{k}v, \mathbf{k})|^2} \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} d\mathbf{p} \end{aligned} \quad (75.3)$$

Из (75.1), (75.3) следует, что выражение для эффективного потенциала можно записать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{ab}(\mathbf{k}) &= \\ &= v_{ab}(\mathbf{k}) \frac{1}{2} \frac{\sum_a e_a^2 n_a}{\sum_b e_b^2 n_b} \int \frac{f_a(\mathbf{p} + 1/2\hbar\mathbf{k}, t) + f_a(\mathbf{p} - 1/2\hbar\mathbf{k}, t)}{|\varepsilon(\mathbf{k}v, \mathbf{k})|^2} \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} d\mathbf{p} \end{aligned} \quad (75.4)$$

При  $\hbar = 0$  это выражение совпадает с классическим выражением (47.2).

В равновесном состоянии выражения (75.2), (75.3) можно представить в виде [22]

$$\langle \delta E \delta E \rangle_{\mathbf{k}} = 4\pi\kappa T \left[ \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon(0, \mathbf{k})} \right) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon(2\pi il\kappa T/\hbar, \mathbf{k})} \right) \right]. \quad (75.5)$$

Диэлектрическая проницаемость на нулевой частоте  $\varepsilon(0, \mathbf{k})$  может быть найдена из (74.2). В равновесном состоянии

$$\varepsilon(0, \mathbf{k}) = 1 + \sum_a \frac{4\pi e_a^2 n_a}{k^2 \kappa T} {}_1F_1 \left( 1, {}^3/2, -\frac{\hbar^2 k^2}{8m_a \kappa T} \right), \quad (75.6)$$

где  ${}_1F_1$  — вырожденная гипергеометрическая функция.

В классическом пределе в (75.6)  ${}_1F_1(1, {}^3/2, 0) = 1$  и в (75.5) второй член обращается в нуль. В результате из (75.5), (75.6)

$$\langle \delta E \delta E \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi\kappa T}{1 + r_D^2 k^2}. \quad (75.7)$$

Подставляя (75.7) в (75.1), получим выражение (47.4) и, следовательно,  $\tilde{\Phi}_{ab}(\mathbf{r})$  — потенциал Дебая.

Квантовые эффекты сказываются при  $\lambda_{a^*k} \gtrsim 1$  ( $\lambda_{a^*} = \hbar / \sqrt{2m\kappa T}$ ). Поскольку  $m_e \ll m_i$ , то квантовые эффекты существенны только для электронов.

Исследование квантового эффективного потенциала (75.4), проведенное в работе [23], показало, что при малых расстояниях ( $\lambda_e k \gg 1$ ) оба члена в (75.5) дают одинаковый вклад  $2\pi\kappa T / (r_D^2 k^2)$  и в сумме

$$(\delta E \delta E)_k = \frac{4\pi\kappa T}{r_D^2 k^2}, \quad \tilde{v}_{ab}(k) = \frac{4\pi e_a e_b}{k^2}. \quad (75.8)$$

Таким образом, на малых расстояниях ( $\lambda_e k \gg 1$ ) квантовый эффективный потенциал совпадает с кулоновским потенциалом. В обратном предельном случае ( $\lambda_e k \ll 1$ ) квантовые эффекты не играют роли и, следовательно, эффективный потенциал  $\tilde{\Phi}_{ab}(\mathbf{r})$  совпадает с потенциалом Дебая.

Из этого следует, что отличие квантового эффективного потенциала от классического имеет место лишь в промежуточной области, где  $\lambda_e k \sim 1$ .

В классической теории в равновесном состоянии с помощью эффективного потенциала (47.5) — потенциала Дебая можно определить двухчастичную функцию распределения (56.23)

$$f_{ab}(\mathbf{r}) = \exp(-\tilde{\Phi}_{ab}(\mathbf{r})/\kappa T), \quad (75.9)$$

которая на малых расстояниях ( $r < r_D$ ) совпадает с распределением Больцмана, а на больших расстояниях с распределением Дебая.

В квантовом случае положение более сложное и эффективный потенциал  $\tilde{\Phi}_{ab}(\mathbf{r})$  не определяет двухчастичную функцию распределения электронов и ионов  $\rho_{ei}(\mathbf{r})$ . Связано это с тем, что частицы разных знаков образуют связанные состояния. Это не учитывается формулами (75.1), (75.2). Вклад связанных состояний можно учесть путем введения так называемого псевдопотенциала.

Пусть степень ионизации плазмы настолько велика, что нейтральные атомы образуют идеальный газ. Неидеальность обусловлена лишь взаимодействием заряженных частиц. При этом условия связанные состояния можно исключить из явного рассмотрения и ввести псевдопотенциал по формуле, аналогичной классической формуле (75.9):

$$\rho_{ei}(\mathbf{r}) = \exp(-\tilde{u}_{ei}/\kappa T). \quad (75.10)$$

В работе [23] получено выражение для псевдопотенциала, который при больших расстояниях ( $r \sim r_D$ ) совпадает с эффективным потенциалом  $\tilde{\Phi}_{ab}(r)$  — потенциалом Дебая, в промежуточной области ( $a_0 \ll r \ll r_D$ ,  $a_0$  — боровский радиус) близок к кулоновскому потенциалу и при  $r = 0$  имеет конечное значение.

Простейшее выражение для псевдопотенциала имеет вид

$$\tilde{u}_{ei}(r) = -e^2 \left( \frac{d}{a_j + cr} + \frac{fr}{a_j^2 + r^2} \right) - \frac{e^2}{r} (e^{-r/r_D} - 1). \quad (75.11)$$

Три константы,  $d$ ,  $f$ ,  $c$ , определяются из условий

$$d = \frac{a_j}{e^2} \kappa T \left( \frac{\xi_{ei}^2}{16} + \ln \frac{\sqrt{\pi}}{8} \xi_{ei}^3 \right),$$

$$dc - f = \frac{a_0}{e^2} \kappa T \frac{a_0}{\lambda_{ei}} \xi_{ei}, \quad (75.12)$$

$$d/c + f = 1.$$

Здесь  $\xi_{ab} = -e_a e_b / \kappa T \lambda_{ab}$  — борновский параметр,  $\lambda_{ab} = \mu_{ab}^{-1} \hbar (2\kappa T_a / m_a + 2\kappa T_b / m_b)^{-1/2}$ ,  $a_0$  — боровский радиус.

Из (75.11) следует, что при  $r = 0$  псевдопотенциал имеет конечное значение

$$\tilde{u}_{ei}(r=0) = -\kappa T \left[ \frac{\xi_{ei}^2}{16} + \ln \frac{\sqrt{\pi}}{8} \xi_{ei}^3 - \frac{\xi_{ei} \lambda_{ei}}{r_D} \right]. \quad (75.13)$$

Здесь учтено, что  $\xi_{ei} \lambda_{ei} = e^2 / \kappa T$ . При  $r \gg a_0$  из (75.11) следует, что

$$\tilde{u}_{ei}(r) = \tilde{\Phi}_{ei}(r) = -\frac{e^2}{r} \exp(-r/r_D). \quad (75.14)$$

Заметим, что без учета поляризации ( $r_D = \infty$ ) выражение (75.11) ведет себя на больших расстояниях как  $1/r^2$ . Известно, что слэтеровская сумма  $S_{ei}(r)$ , определяющая в этом случае функцию  $\rho_{ei}(r)$  для кулоновского потенциала, убывает с расстоянием как  $1/r^4$ . Выражение (75.11) можно усовершенствовать так, чтобы на больших расстояниях в нем исчезали члены с  $1/r^2$ ,  $1/r^3$ . Тогда выражение (75.11) на больших расстояниях без учета поляризации будет вести себя как  $1/r^4$  [23].

Выражение (75.11) для псевдопотенциала следует рассматривать лишь как достаточно простое модельное выражение, удовлетворяющее определенной совокупности требований. Последовательная теория псевдопотенциала для плазмы очень сложна и в настоящее время еще не развита.

## § 76. Квантовое кинетическое уравнение Больцмана для неидеальной плазмы

В поляризационном приближении квантовое кинетическое уравнение для идеальной плазмы было рассмотрено в § 74. Как и в классической теории (§§ 53, 54), можно построить более общие кинетические уравнения для неидеальной плазмы. Однако, как мы знаем на примере классической теории (§ 56), в поляризационном приближении вклад взаимодействия частиц на малых расстояниях учитывается недостаточно корректно. Эта некорректность особенно существенна при расчете недиссипативных характеристик плазмы.

Таким образом, возникает необходимость построения квантовых кинетических уравнений для неидеальной плазмы, в которых учитываются эффекты поляризации и сильные взаимодействия частиц на малых расстояниях. Как и в классической теории (§ 56), при решении этой задачи будем учитывать лишь усредненный вклад динамической поляризации. Это позволяет учитывать эффекты поляризации путем введения эффективного потенциала или псевдопотенциала.

В этом приближении для двухчастичной матрицы плотности  $\rho_{ab}$ , определяющей интеграл столкновений, можно снова использовать уравнение (66.10), которое соответствует приближению парных столкновений. Однако теперь в нем

$$\Phi_{ab} \rightarrow u_{ab}. \quad (76.1)$$

Потенциал  $u_{ab}$  определяется следующим образом:

$$u_{ab} = \begin{cases} \tilde{\Phi}_{ab} & \text{при } a = b, \\ \tilde{u}_{ab} & \text{при } a \neq b. \end{cases} \quad (76.2)$$

Итак, потенциал  $u_{ab}$  — эффективный потенциал для частиц одинаковых знаков и псевдопотенциал для частиц разных знаков.

Если при вычислении потенциалов  $\tilde{\Phi}_{ab}$ ,  $\tilde{u}_{ab}$  ограничиться приближением локального равновесия, то для  $\tilde{\Phi}_{ab}$  при  $a = b$  можно приближенно (§ 75) использовать потенциал Дебая, а для  $\tilde{u}_{ab}$  — выражение (75.11).

Обозначим матрицу плотности, удовлетворяющую уравнению (66.10), но с потенциалом (76.2), через  $\tilde{\rho}_{ab}$ . Как и в § 66, разложим эту матрицу плотности по собственным функциям  $\tilde{\Psi}_{p_1, p_2}(r_1, r_2)$ , определяемым уравнением (66.11) с заменой (76.1).

Решение уравнения для функции  $\tilde{\rho}_{ab}$  снова можно представить в виде (66.19) с заменой в (66.18)  $\Psi \rightarrow \tilde{\Psi}$ .

Для определения интеграла столкновений следует поставить найденное таким путем выражение для функции  $\tilde{\rho}_{ab}$  в формулу

(66.8)<sub>2</sub>. Интеграл столкновений снова можно представить в виде суммы двух членов (66.20). Для  $I_{a1}$  вместо (66.22) получим теперь выражение

$$I_{a1}(\mathbf{p}_1, t) = \frac{i}{\hbar} \frac{V^2}{(2\pi)^6 \hbar^3} \int \sum_b N_b [\Phi_{ab}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - 1/2 \hbar \mathbf{v}|) - \Phi_{ab}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + 1/2 \hbar \mathbf{v}|)] e^{-i\mathbf{v}\mathbf{p}_1} \tilde{\Psi}_{\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}_2}(\mathbf{r}_1 + 1/2 \hbar \mathbf{v}, \mathbf{r}_2) \times \\ \times \tilde{\Psi}_{\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}_2}^*(\mathbf{r}_1 - 1/2 \hbar \mathbf{v}, \mathbf{r}_2) f_a(\mathbf{p}'_1, t) f_b(\mathbf{p}_2, t) d\mathbf{v} d\mathbf{p}'_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{r}_2, \quad (76.3)$$

где  $\tilde{\Psi}$  — собственная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_a} \Delta_{r_1} - \frac{\hbar^2}{2m_b} \Delta_{r_2} + u_{ab}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \right] \tilde{\Psi}_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \\ = E_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2} \tilde{\Psi}_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (76.4)$$

Выражение (76.3) уже нельзя свести к бальцовановской форме с квантовым эффективным сечением (§ 68), так как благодаря замене  $\Phi_{ab} \rightarrow u_{ab}$  учитываются коллективные взаимодействия.

Решение уравнения (76.4) пока неизвестно. В работах [24] получены численные данные о собственных значениях уравнения (76.4) для потенциала Дебая.

## § 77. Термодинамические функции неидеальной плазмы

Цель настоящего параграфа — показать, в какой мере выражения для термодинамических функций, полученные в рамках рассматриваемой модели, согласуются с соответствующими выражениями квантовой статистической теории. Конкретные вычисления проведены пока не с потенциалом  $u_{ab}$ , а с эффективным потенциалом  $\tilde{\Phi}_{ab}$  — потенциалом Дебая.

Из формулы (67.10) следует, что корреляционная часть внутренней энергии  $U_{\text{кор}}$  выражается через потенциальную энергию. Можно записать соответствующее выражение и для свободной энергии

$$F_{\text{кор}} = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} U_{\text{пот}}(\beta, \lambda), \quad U_{\text{кор}} = \frac{\partial}{\partial \beta} \beta F_{\text{кор}}. \quad (77.1)$$

Из выражения (67.1) следует, что

$$U_{\text{пот}} = 1/2 \sum_{ab} n_a n_b \int \Phi_{ab}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \tilde{\rho}_{ab}^1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2) d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (77.2)$$

Функция  $\tilde{\rho}_{ab}^1$  определяется выражением (67.2), если в нем  $\Psi \rightarrow \tilde{\Psi}$ .

Точное решение уравнения для функции  $\tilde{\Psi}_{p,p}$  даже для потенциала Дебая пока неизвестно, поэтому выражения для термодинамических функций представим в виде рядов по борновскому параметру  $\xi_{ab}$ .

В борновском приближении для состояния локального равновесия компоненты Фурье функции  $\tilde{\rho}_{ab}^1$  определяются выражением

$$\tilde{\rho}_{ab}^1(\mathbf{k}) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}) - \frac{m_a + m_b}{m_a \kappa T_b + m_b \kappa T_a} u_{ab}(\mathbf{k})_1 F_1\left(1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{4} \lambda_{ab}^2 k^2\right). \quad (77.3)$$

Из (77.2), (77.3) находим

$$U_{\text{пот}} = -2\pi \sum_{ab} n_a n_b e_a^2 e_b^2 \frac{m_a + m_b}{m_a \kappa T_b + m_b \kappa T_a} r_D G(\lambda_{ab}/r_D). \quad (77.4)$$

Здесь использовано обозначение

$$G(\eta) = \frac{1}{\pi e_a e_b r_D^2} \int_0^\infty d\rho \rho^2 \int_0^\infty dk' u_{ab}(k') \exp(-\rho^2) \times \\ \times \left[ \frac{2\rho}{\eta k'} \sin(\eta k' \rho) - \cos(\eta k' \rho) \right], \quad (77.5)$$

где  $k' = r_D k$ . Выражения (77.4), (77.5) справедливы для произвольного потенциала  $u_{ab}$ . Для эффективного потенциала  $\tilde{\Phi}_{ab}$  — потенциала Дебая

$$G(\eta) = (\sqrt{\pi}/\eta) \{1 - \exp(\eta^2/4)[1 - \Phi(\eta/2)]\}. \quad (77.6)$$

При  $\eta \ll 1$  отсюда

$$G\left(\frac{\lambda_{ab}}{r_D}\right) = 1 - 1/4 \sqrt{\pi} \lambda_{ab}/r_D + O(\lambda_{ab}^2/r_D^2). \quad (77.7)$$

Для изотермической плазмы из (77.7), (77.4) получаем выражения, совпадающие с результатами равновесной теории [25, 5, 44, 39].

Таким образом, в первом приближении по  $\lambda_{ab}/r_D$  при использовании дебаевского эффективного потенциала в равновесном состоянии получаются правильные классические выражения и правильные квантовые поправки порядка  $\lambda_{ab}/r_D$ .

Заметим, что выражение (77.7) практически не зависит от выбора эффективного потенциала.

Для изотермической плазмы в приближении локального равновесия при  $(\lambda_{ab}/r_D) \ll 1$  можно провести вычисление термодинамических функций в любом приближении по борновскому параметру.



Для плотности внутренней энергии получается выражение

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{3}{2} \kappa T \sum_a n_a - \frac{\kappa T}{8\pi r_D^3} - \\
 & - \pi \kappa T \sum_{ab} n_a n_b \lambda_{ab}^3 \left\{ -\frac{5}{8} \sqrt{\pi} \xi_{ab}^2 - \left( a + \ln \frac{\lambda_{ab}}{r_D} \right) \xi_{ab}^3 + \right. \\
 & \left. + \sqrt{\pi} \sum_{m=4}^{\infty} (m+3) \frac{\zeta(m-2)}{\Gamma(m/2)+1} (1/2 \xi_{ab})^m + O\left(\frac{\lambda_{ab}}{r_D}\right) \right\}, \quad (77.8)
 \end{aligned}$$

где

$$a = 1/2 C + \ln 2 - 1/3,$$

где  $\zeta$  — дзета-функция Римана,  $\Gamma$  — гамма-функция,  $C$  — постоянная Эйлера.

Этот результат согласуется с результатом равновесной теории. Отличие состоит лишь в численном значении коэффициента  $a$ . Это отличие, однако, не является существенным, так как для плазмы с  $e_e = -e_i$  член с  $\xi_{ab}^3$  в (77.8) обращается в нуль.

Формула (77.8) неявно учитывает вклад связанных состояний, времена жизни которых много меньше времени свободного пробега. Чтобы выделить этот вклад более явно, преобразуем выражение (77.8) для водородной плазмы.

Воспользуемся формулой [39]

$$\begin{aligned}
 \lambda_{ie}^3 \sum_{m=4, 6, 8, \dots} (m+3) \frac{\zeta(m-2)}{\Gamma(m/2)+1} (1/2 \xi_{ie})^m = \\
 = \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \lambda_{ie}^3 \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{s!} (1/4 \xi_{ie}^2)^s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s-1}} \right\} = \\
 = \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \lambda_{ie}^3 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (\exp(-\beta E_n) - 1 + \beta E_n) \right\}. \quad (77.9)
 \end{aligned}$$

Здесь учтено, что  $\xi_{ie}^2/4n^2 = -\beta E_n$ ,  $E_n$  — уровни энергии водорода.

Формула (77.9) определяет суммарный вклад в (77.8) членов ряда по четным степеням  $\xi_{ei}$ , начиная с  $\xi_{ei}^4$ . Это вклад связанных состояний. Мы видим, что он определяется производной от статистической суммы атома водорода, обрезанной по методу Планка — Ларкина (см. [28] и обзор [29]).

Остальной вклад ряда по  $\xi_{ei}$  обозначим через  $K^*(\beta)$ . Тогда выражение для внутренней энергии плазмы можно записать

в виде

$$U = \frac{3}{2} kT \sum_a n_a - \frac{kT}{8\pi r_D^3} - n_e^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ 8\pi \sqrt{\pi} \lambda_{ie}^3 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (\exp(-\beta E_n) - 1 + \beta E_n) + K^*(\beta) \right]. \quad (77.10)$$

Вклад  $K^*$  слабо зависит от температуры. Для  $K^*$  можно использовать следующую интерполяционную формулу:

$$K^*(\beta) \approx -4\pi \sqrt{\pi} \lambda_{ie}^3 |\beta E_1|,$$

где  $E_1$  — энергия основного состояния атома водорода.

Вернемся к выражению для двухчастичной функции распределения  $\tilde{\rho}_{ab}^1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2)$ . Оно конечно при всех расстояниях  $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ . Убывание на больших расстояниях обусловлено поляризацией. Конечность на малых расстояниях обусловлена квантовыми эффектами.

Например, для состояния локального равновесия неизотермической плазмы при использовании потенциала Дебая из формулы (77.3) следует

$$\tilde{\rho}_{ab}^1(r=0) = 1 - \frac{\sqrt{\pi} (m_a + m_b) e_a e_b}{(m_a \kappa T_b + m_b \kappa T_a) \lambda_{ab}} \exp(\lambda_{ab}^2 / 4r_D^2) [1 - \Phi(\lambda_{ab} / 2r_D)]. \quad (77.11)$$

Для изотермической плазмы при  $\lambda_{ab} r_D \ll 1$  это выражение принимает вид

$$\tilde{\rho}_{ab}^1(r=0) = 1 - \sqrt{\pi} \frac{e_a e_b}{\lambda_{ab} \kappa T} \quad (77.12)$$

и совпадает с соответствующими результатами работы Кельбга [30] и Трубникова и Елесина (см. [25] и в [44]).

## § 78. Обменные эффекты

Рассмотрим некоторые результаты квантовой кинетической теории неидеальной плазмы с учетом обменных эффектов.

Квантовое кинетическое уравнение Больцмана для неидеальной плазмы с учетом обменных эффектов рассмотрено в работе [6]. Это уравнение получается из уравнений § 70 по схеме, описанной в § 76. Для иллюстрации роли обменных эффектов приведем некоторые результаты.

С учетом обмена выражение (77.3) для компоненты Фурье функции распределения  $\tilde{\rho}_{ab}^1(\mathbf{r})$  принимает вид [6]

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{ab}^1(\mathbf{k}) &\equiv \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \tilde{\rho}_{ab}^1(\sigma_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_2, \mathbf{k}) = \\ &= (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}) - \frac{1}{\kappa T} u_{ab}(\mathbf{k}) {}_1F_1\left(1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\lambda_{ab}^2 k^2\right) - \\ &\quad - \frac{\delta_{ab}}{g_a} \pi^{3/2} \lambda_{ab}^{3/2} \exp\left(-\frac{1}{4}\lambda_{ab}^2 k^2\right) + \\ &\quad + \frac{\delta_{ab}}{g_a} \frac{\lambda_{ab}}{\pi^{3/2} \kappa T} \exp\left(-\frac{1}{4}\lambda_{ab}^2 k^2\right) \int_0^\infty dt \exp\left(-\lambda_{ab}^2 t^2\right) u_{ab}(2t) \frac{\text{sh}(\lambda_{ab}^2 kt)}{kt}. \end{aligned} \quad (78.1)$$

Это выражение справедливо при произвольной функции  $u_{ab}$ .

В выражении (78.1) обменные эффекты учитывают члены, пропорциональные  $\delta_{ab}$ . Для кулоновского потенциала последний член в (78.1) имеет вид

$$\frac{\delta_{ab}}{g_a} \frac{2\pi e_a e_b \lambda_{ab}^2}{\kappa T} \exp\left(-\frac{1}{4}\lambda_{ab}^2 k^2\right) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\lambda_{ab} k)^{2\nu}}{4^\nu \nu! (2\nu + 1)^2}.$$

Функция распределения  $\tilde{\rho}_{ab}^1(r)$  для кулоновского потенциала определяется выражением (Кельбг [30])

$$\begin{aligned} \rho_{ab}(r) &= 1 - \frac{\delta_{ab}}{g_a} e^{-r^2/\lambda_{ab}^2} - \\ &\quad - \frac{e_a e_b}{\kappa T} \left\{ \frac{1}{r} \left(1 - e^{-r^2/\lambda_{ab}^2}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda_{ab}} \left(1 - \Phi\left(\frac{r}{\lambda_{ab}}\right)\right) \right\} + \\ &\quad + \frac{\delta_{ab}}{g_a} \frac{e_a e_b}{\kappa T} \frac{1}{r} e^{-r^2/\lambda_{ab}^2} \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha} \Phi\left(\frac{r\alpha}{\lambda_{ab} \sqrt{1-\alpha}}\right). \end{aligned} \quad (78.2)$$

При  $r = 0$  и  $g_a = 2$  из (78.2) следует выражение (ср. с (77.12))

$$\rho_{ab}^1(r=0) = \left(1 - \frac{\sqrt{\pi} e_a e_b}{\kappa T \lambda_{ab}}\right) \left(1 - \frac{\delta_{ab}}{2}\right). \quad (78.3)$$

Таким образом, при  $a = b$  из-за обменных эффектов результат меняется вдвое.

Для дебаевского потенциала из (77.3) или из (78.1) без учета обменных эффектов можно получить выражение

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{ab}^1(\mathbf{r}) = & 1 - \frac{e_a e_b \pi^{1/2} r_D}{2\kappa T \lambda_{ab}} \frac{1}{r} \left[ \exp\left(-\frac{r}{r_D} + \frac{1}{4} \frac{\lambda_{ab}^2}{r_D^2}\right) \times \right. \\ & \times \left\{ \Phi\left(\frac{r}{\lambda_{ab}} - \frac{\lambda_{ab}}{2r_D}\right) + 2\Phi\left(\frac{\lambda_{ab}}{2r_D}\right) - 1 \right\} + \\ & \left. + \exp\left(\frac{r}{r_D} + \frac{1}{4} \frac{\lambda_{ab}^2}{r_D^2}\right) \left\{ 1 - \Phi\left(\frac{r}{\lambda_{ab}} + \frac{\lambda_{ab}}{2r_D}\right) \right\} \right]. \quad (78.4) \end{aligned}$$

Учет обменных эффектов приводит к сложному выражению. Запишем лишь результат при  $r = 0$  ( $g_a = 2$ ):

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{ab}^1(\mathbf{r} = 0) = \\ = \left[ 1 - \sqrt{\pi} \frac{e_a e_b}{\kappa T \lambda_{ab}} \exp\left(\frac{1}{4} \frac{\lambda_{ab}^2}{r_D^2}\right) \left( 1 - \Phi\left(\frac{\lambda_{ab}}{2r_D}\right) \right) \right] \left( 1 - \frac{\delta_{ab}}{2} \right). \quad (78.5) \end{aligned}$$

Мы видим, что и в этом случае при  $a = b$  из-за обменных эффектов результат меняется в два раза.

Рассмотрим термодинамические функции с учетом обменных эффектов. Мы знаем, что термодинамические функции можно по формулам (67.10), (77.1) выразить через потенциальную энергию

$$\begin{aligned} U_{\text{пот}} = \frac{1}{2} \sum_{ab} n_a n_b \int \bar{\rho}_{ab}^1(\mathbf{r}) \Phi_{ab}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \\ = \frac{1}{2} \sum_{ab} n_a n_b \int \bar{\rho}_{ab}^1(\mathbf{k}) v_{ab}(\mathbf{k}) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \quad (78.6) \end{aligned}$$

Здесь  $\Phi_{ab}(\mathbf{r})$  — кулоновский потенциал.

Для части потенциальной энергии, определяемой обменными эффектами, для дебаевского потенциала из выражения (78.1) находим

$$\begin{aligned} U_{\text{пот}}^{\text{обм}} = \frac{1}{2} \sum_{ab} n_a n_b \frac{\delta_{ab}}{g_a} \left\{ -2\pi e_a e_b \lambda_{ab}^2 + \right. \\ \left. + \frac{8\lambda_{ab}^2 (e_a e_b)^2}{\kappa T} \int_0^1 du \int_0^1 dv \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda_{ab} \sqrt{1-u^2v^2}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\pi}{4r_D} \exp\left\{ \frac{\lambda_{ab}^2}{4r_D^2} (1-u^2v^2) \right\} \left\{ 1 - \Phi\left(\frac{\lambda_{ab}}{2r_D} \sqrt{1-u^2v^2}\right) \right\} \right] \right\}. \quad (78.7) \end{aligned}$$

Первый член в фигурных скобках определяет вклад обмена в приближении Хартри—Фока. Первый интеграл (78.7) вычисляем точно, а второй разлагаем по  $\lambda_{ab}/r_D$ . В результате получаем

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}_{\text{пот}}^{\text{обм}} &= \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{ab} n_a n_b \frac{\delta_{ab}}{g_a} \left\{ -2\pi e_a e_b \lambda_{ab}^2 + \frac{2\pi \lambda_{ab} (e_a e_b)^2}{\kappa T} \left[ \sqrt{\pi} \ln 2 - \frac{\lambda_{ab}}{r_D} \right] \right\}. \quad (78.8)
 \end{aligned}$$

При  $r_D \rightarrow \infty$  (для кулоновской плазмы) это выражение совпадает с результатом равновесной теории.

Вычисление термодинамических функций с учетом обмена, как и в § 77, можно провести в любом приближении по борновскому параметру  $\xi_{ab} = -e_a e_b / \kappa T \lambda_{ab}$ . Приведем соответствующие результаты:

$$\begin{aligned}
 F_{\text{кор}} &= -\frac{\kappa T}{12\pi r_D^3} - \\
 &- 2\pi \kappa T \sum_{ab} n_a n_b \lambda_{ab}^3 \left\{ -\frac{\delta_{ab}}{g_a} E(\xi_{ab}) - \frac{1}{6} \xi_{ab}^3 \ln \frac{\lambda_{ab}}{r_D} + Q(\xi_{ab}) \right\}. \quad (78.9)
 \end{aligned}$$

Первый член соответствует приближению Дебая—Хюккеля. Член, содержащий функцию  $E(\xi_{ab})$ , описывает обменные эффекты. Функция  $E(\xi_{ab})$  определяется выражением

$$\begin{aligned}
 E(\xi_{ab}) &= \frac{1}{2} \xi_{ab} + \frac{\ln 2}{4} \sqrt{\pi} \xi_{ab}^2 + \\
 &+ \sqrt{\pi} \sum_{m=3}^{\infty} (1 - 2^{2-m}) \frac{\zeta(m-1)}{\Gamma(m/2+1)} \left( \frac{\xi_{ab}}{2} \right)^m + O\left( \xi_{ab}^2 \frac{\lambda_{ab}}{r_D} \right). \quad (78.10)
 \end{aligned}$$

Последние два члена в (78.9) описывают обычные (без обмена) квантовые эффекты. Функция  $Q(\xi_{ab})$  определяется выражением

$$\begin{aligned}
 Q(\xi_{ab}) &= -\frac{1}{8} \sqrt{\pi} \xi_{ab}^2 - \frac{a}{6} \xi_{ab}^3 + \\
 &+ \sqrt{\pi} \sum_{m=4}^{\infty} \frac{\zeta(m-2)}{\Gamma(m/2+1)} \left( \frac{\xi_{ab}}{2} \right)^m + O\left( \xi_{ab}^2 \frac{\lambda_{ab}}{r_D} \right). \quad (78.11)
 \end{aligned}$$

Здесь  $a = \frac{1}{2}C + \ln 3 - \frac{1}{2}$ ,  $C$  — постоянная Эйлера.

Мы кратко изложили некоторые вопросы квантовой теории неидеальных газов и неидеальной плазмы. Из-за недостатка места здесь нет возможности изложить квантовую теорию кинетических флуктуаций. Заметим лишь, что она может быть построена по аналогии с соответствующей классической теорией.

## КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ХИМИЧЕСКИ РЕАГИРУЮЩИХ ГАЗОВ И ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ

### § 79. Частично ионизованная плазма. Исходная модель

В настоящее время значительно разработана кинетическая теория молекулярных газов (см. обзоры Даллера и Хоффмана [31], Вальдмана [32]). Усложнение теории в этом случае связано с необходимостью учета внутренних степеней свободы молекул газа.

Кинетическая теория химически реагирующих газов и частично ионизованной плазмы значительно сложнее. Число работ, посвященных выводу кинетических уравнений с учетом химических преобразований, невелико.

В работах Пелетминского [33] и Колесниченко [34] сделана попытка построения таких кинетических уравнений путем использования разложений по параметру плотности, но с измененными условиями ослабления начальных корреляций. Такой подход при достаточно большой концентрации связанных частиц оказывается не очень удачным.

В работах Якуба [35] и Колесниченко [36] проведено обобщение метода Боголюбова для построения кинетических уравнений химически реагирующих газов. Исходным является уравнение Лиувилля для функции распределения  $N$  одинаковых частиц, которые могут образовывать связанные комплексы — молекулы. Отличие от уравнения Лиувилля (1.2) состоит в том, что здесь нельзя делать предположение об аддитивности потенциальной энергии взаимодействия. Вследствие этого правые части цепочки уравнений для функций распределения имеют вид бесконечных рядов по плотности.

Для построения кинетических уравнений с учетом химических реакций нужно обрывать ряды по плотности таким образом, чтобы в каждом приближении были учтены все возможные

разбиения данной группы частиц. Такая методика развита в работе Колесниченко [36].

В работах [22, 37] для систем заряженных частиц с кулоновским взаимодействием [22] и электромагнитным взаимодействием [37] был развит иной метод построения кинетических уравнений для частично ионизованной плазмы. Поясним существо этого метода.

Рассмотрим трехкомпонентную плазму, состоящую из электронов, ионов и атомов водорода. Величины, характеризующие свободные заряженные частицы, обозначаем индексами  $e$  и  $i$ , а атомы — индексом  $ei$ . Заряженные частицы взаимодействуют между собой по закону Кулона.

В частично ионизованной плазме возможны два предельных состояния: состояние с нулевой степенью ионизации — нейтральный газ и состояние полностью ионизованной плазмы.

В качестве исходного возьмем первое состояние, в котором все частицы по парам связаны в атомы. Такое состояние газа можно характеризовать операторной матрицей плотности атомов — пар связанных заряженных частиц. Обозначим ее через  $\hat{\rho}_{ei}(\mathbf{r}'_e, \mathbf{r}'_i, \mathbf{r}''_e, \mathbf{r}''_i, t)$  (ср. с (71.3)).

Вместо  $\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_i$  удобнее использовать переменные

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= (m_e \mathbf{r}_e + m_i \mathbf{r}_i) / (m_e + m_i), & \mathbf{r}_e &= \mathbf{R} + m_i \mathbf{r} / (m_e + m_i), \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_e - \mathbf{r}_i, & \mathbf{r}_i &= \mathbf{R} - m_e \mathbf{r} / (m_e + m_i) \end{aligned} \quad (79.1)$$

и соответствующую матрицу плотности  $\hat{\rho}_{ei}(\mathbf{R}', \mathbf{R}'', \mathbf{r}', \mathbf{r}'', t)$ . Она удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}_{ei}}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2M} (\Delta_{\mathbf{R}'} - \Delta_{\mathbf{R}''}) \hat{\rho}_{ei} - \frac{\hbar^2}{2\mu} (\Delta_{\mathbf{r}'} - \Delta_{\mathbf{r}''}) \hat{\rho}_{ei} + \\ &+ [(\Phi_{ei}(\mathbf{r}') + \hat{U}_{ei}(\mathbf{R}', \mathbf{r}')) - (\Phi_{ei}(\mathbf{r}'') + \hat{U}_{ei}(\mathbf{R}'', \mathbf{r}''))] \hat{\rho}_{ei}. \end{aligned} \quad (79.2)$$

Здесь  $\Phi_{ei}$  — кулоновский потенциал взаимодействия,

$$M = m_e + m_i, \quad \mu_{ei} \equiv \mu = m_e m_i / (m_e + m_i). \quad (79.3)$$

Функция

$$U_{ei}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = e_e U(\mathbf{r}_e) + e_i U(\mathbf{r}_i)$$

— потенциальная энергия частиц пары в поле окружающих частиц. Оператор  $\hat{U}(q)$  удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\begin{aligned} \Delta \hat{U}(q, t) &= -4\pi \int \left[ e_e \delta \left( q - \left( \mathbf{R} + \frac{m_i}{m_e + m_i} \mathbf{r} \right) \right) + \right. \\ &\left. + e_i \delta \left( q - \left( \mathbf{R} - \frac{m_e}{m_e + m_i} \mathbf{r} \right) \right) \right] \hat{\rho}_{ei}(\mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathbf{r}, \mathbf{r}, t) \frac{d\mathbf{R} d\mathbf{r}}{V^2}. \end{aligned} \quad (79.4)$$

Уравнения (79.2), (79.4) составляют замкнутую систему уравнений для операторов  $\hat{\rho}_{ei}$ ,  $\hat{U}$ . Ее следует дополнить условием нормировки

$$\int \hat{\rho}_{ei}(\mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathbf{r}, \mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{R}}{V^2} = N, \quad (79.5)$$

$N$  — полное число атомов при нулевой степени ионизации.

В обратном предельном случае, когда все заряженные частицы свободны, исходной является система (71.6), (71.7) для операторов  $\hat{N}_a(x, t)$ ,  $\hat{O}(r, t)$  (или  $\hat{\rho}_a$ ,  $\hat{O}(r, t)$ ).

Произведем разложение  $\hat{\rho}_{ei}$  по собственным функциям оператора Гамильтона пары частиц, образующих атом, т. е. по собственным функциям уравнения

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{\mathbf{R}} - \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_{\mathbf{r}} + \Phi_{ei}(\mathbf{r}) \right] \Psi_{\alpha p}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = E_{\alpha p} \Psi_{\alpha p}(\mathbf{r}, \mathbf{R}). \quad (79.6)$$

Из этого уравнения следует, что

$$\Psi_{\alpha p}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \Psi_p(\mathbf{R}), \quad E_{\alpha p} = E_{\alpha} + E_p. \quad (79.7)$$

Индекс  $\alpha = n$ ,  $p$  ( $n$  для дискретного спектра и  $p$  для непрерывного спектра).

Условия нормировки для собственных функций имеют вид

$$\begin{aligned} \int \Psi_{p'}(\mathbf{R}) \Psi_{p''}^*(\mathbf{R}) d\mathbf{R} &= \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}''), \quad \Psi_p = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp\left(\frac{i\mathbf{p}\mathbf{R}}{\hbar}\right), \\ \int \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \Psi_{\beta}^*(\mathbf{r}) d\mathbf{r} &= \delta_{\alpha\beta} = \\ &= \begin{cases} \delta_{nm} & \text{при } \alpha = n, \quad \beta = m; \\ 0 & \text{при } \alpha = p', \quad \beta = m; \quad \alpha = n, \quad \beta = p''; \\ \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'') & \text{при } \alpha = p', \quad \beta = p''. \end{cases} \end{aligned} \quad (79.8)$$

Используем разложение по собственным функциям

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{ei} &= \frac{V^2}{(2\pi\hbar)^6} \sum_{\alpha\beta} \int \hat{\rho}_{\alpha\beta}(\mathbf{P}', \mathbf{P}'', t) \times \\ &\quad \times \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}') \Psi_{\beta}^*(\mathbf{r}'') \Psi_{p'}(\mathbf{R}') \Psi_{p''}^*(\mathbf{R}'') d\mathbf{P}' d\mathbf{P}''. \end{aligned} \quad (79.9)$$

Из (79.2), (79.9) находим уравнение для операторной матрицы плотности  $\hat{\rho}_{\alpha\beta}(\mathbf{P}', \mathbf{P}'', t)$ :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}_{\alpha\beta}}{\partial t} &= (E_{\alpha} + E_{p'} - E_{\beta} - E_{p''}) \hat{\rho}_{\alpha\beta}(\mathbf{P}', \mathbf{P}'', t) + \\ &+ \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{\gamma} \int [\hat{U}_{\alpha\gamma}(\mathbf{P}', \mathbf{P}) \hat{\rho}_{\gamma\beta}(\mathbf{P}, \mathbf{P}'') - \hat{\rho}_{\alpha\gamma}(\mathbf{P}', \mathbf{P}) \hat{U}_{\gamma\beta}(\mathbf{P}, \mathbf{P}'')] d\mathbf{P}. \end{aligned} \quad (79.10)$$



Здесь

$$\sum_{\nu} \dots = \sum_{\alpha} \dots + \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int \dots d\mathbf{p}, \quad \alpha = n, \mathbf{p}', \quad \beta = m, \mathbf{p}'', \quad (79.11)$$

$$\begin{aligned} \hat{U}_{\alpha\beta}(\mathbf{P}', \mathbf{P}'', t) &= \\ &= \int \Psi_{\alpha}^*(\mathbf{r}) \Psi_{\mathbf{p}'}^*(\mathbf{R}) \hat{U}_{ei}(\mathbf{R}, \mathbf{r}, t) \Psi_{\mathbf{p}''}(\mathbf{R}) \Psi_{\beta}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} d\mathbf{R}. \quad (79.12) \end{aligned}$$

Уравнение (79.10) — краткая запись системы четырех уравнений для функций  $\rho_{nm}(\mathbf{P}', \mathbf{P}'', t)$ ,  $\rho_{\mathbf{p}', \mathbf{p}''}$ ,  $\rho_{n, \mathbf{p}''}$ ,  $\rho_{\mathbf{p}', m}$ . Первые два уравнения описывают свободные и связанные состояния частиц, входящих в пары (в атомы), а остальные два уравнения — переходы между свободными и связанными состояниями.

Система уравнений (79.10), (79.12), (79.4) служит исходной при построении кинетических уравнений для частично ионизованной плазмы.

## § 80. Кинетические уравнения для функций распределения электронов, ионов и атомов [22]

Вывод кинетических уравнений для функций распределения электронов, ионов и атомов проведем в два этапа. Сначала получим кинетическое уравнение для функции распределения атомов в предположении, что степень ионизации равна нулю, а затем введем в него условия ослабления корреляции, соответствующие образованию свободных заряженных частиц при ионизации атомов.

Рассмотрим пространственно однородный газ. Тогда

$$\bar{\rho}_{\alpha\beta}(\mathbf{P}', \mathbf{P}'', t) = \delta_{\alpha\beta} \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \delta(\mathbf{P}' - \mathbf{P}'') f_{\alpha}(\mathbf{P}', t), \quad \bar{U} = 0 \quad (80.1)$$

и уравнение для функции распределения  $f_{\alpha}$  имеет вид (ср. с (74.6))

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\alpha}(\mathbf{P}', t)}{\partial t} &= \\ &= - \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{\beta} \int \text{Im} \overline{(\delta\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{P}', \mathbf{P}'', t) \delta U_{\alpha\beta}(\mathbf{P}', \mathbf{P}'', t))} d\mathbf{P}'' \equiv I_{\alpha}(\mathbf{P}', t). \end{aligned} \quad (80.2)$$

Если расчет корреляции флуктуаций  $\delta\rho_{\alpha\beta}$ ,  $\delta U_{\alpha\beta}$  произвести в поляризационном приближении, то для интеграла столкновений (расчеты аналогичны проведенным в §§ 73, 74) получим

следующее выражение:

$$I_{\alpha}(\mathbf{P}', t) = \frac{1}{(2\pi)^3 \hbar} \sum_{\beta} \int d\omega d\mathbf{k} d\mathbf{P}'' \frac{|P_{\alpha\beta}(\mathbf{k})|^2}{k^2} \delta(\hbar\mathbf{k} - (\mathbf{P}' - \mathbf{P}'')) \times \\ \times \delta(\hbar\omega - (E_{\alpha} + E_{\mathbf{P}'} - E_{\beta} - E_{\mathbf{P}''})) \left[ (\delta\mathbf{E} \delta\mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}} (f_{\beta}(\mathbf{P}'', t) - f_{\alpha}(\mathbf{P}', t)) - \right. \\ \left. - \frac{4\pi\hbar \operatorname{Im} \epsilon(\omega, \mathbf{k})}{|\epsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} (f_{\beta}(\mathbf{P}'', t) + f_{\alpha}(\mathbf{P}', t)) \right]. \quad (80.3)$$

Здесь использовано обозначение для диэлектрической проницаемости

$$\epsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{4\pi n}{k^2} \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{\alpha\beta} \int d\mathbf{P}' d\mathbf{P}'' \delta(\hbar\mathbf{k} - (\mathbf{P}' - \mathbf{P}'')) \times \\ \times \frac{|P_{\alpha\beta}(\mathbf{k})|^2 (f_{\alpha}(\mathbf{P}', t) - f_{\beta}(\mathbf{P}'', t))}{\hbar(\omega + i\Delta) - (E_{\alpha} + E_{\mathbf{P}'} - E_{\beta} - E_{\mathbf{P}''})} \quad (80.4)$$

и обозначение для спектральной плотности флуктуаций поля

$$(\delta\mathbf{E} \delta\mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{2nV}{\hbar^2} \sum_{\alpha\beta} \int d\mathbf{P}' d\mathbf{P}'' [f_{\alpha}(\mathbf{P}', t) + f_{\beta}(\mathbf{P}'', t)] \times \\ \times \delta(\hbar\mathbf{k} - (\mathbf{P}' - \mathbf{P}'')) \delta(\hbar\omega - (E_{\alpha} + E_{\mathbf{P}'} - E_{\beta} - E_{\mathbf{P}''})) \frac{|P_{\alpha\beta}(\mathbf{k})|^2}{k^2 |\epsilon(\omega, \mathbf{k})|^2}. \quad (80.5)$$

Использовано также обозначение для матричного элемента

$$P_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \int \left[ e_e \exp\left(i \frac{m_i}{m_e + m_i} \mathbf{k} \mathbf{r}\right) + \right. \\ \left. + e_i \exp\left(-i \frac{m_e}{m_e + m_i} \mathbf{k} \mathbf{r}\right) \right] \Psi_{\alpha}^*(\mathbf{r}) \Psi_{\beta}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (80.6)$$

Выражения (80.3)–(80.5) соответствуют формулам (74.7), (74.2), (74.1) для полностью ионизованного газа. Исключая из (80.3) функции  $(\delta\mathbf{E} \delta\mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}}$ ,  $\operatorname{Im} \epsilon(\omega, \mathbf{k})$ , с помощью формул (80.4), (80.5) получим выражение для интеграла столкновений, аналогичное выражению (74.9) или (74.10).

Чтобы получить из (80.3) интегралы столкновений для электронов, ионов и атомов частично ионизованной плазмы, поступим следующим образом.

Заметим прежде всего, что в соответствии с (79.11) правая часть (80.3) может быть представлена в виде суммы двух частей, учитывающих по переменным  $\beta$ ,  $\mathbf{P}' = (n, \mathbf{P}'; \mathbf{p}', \mathbf{P}')$  вклады от дискретного и непрерывного спектров.

Выражения для спектральной функции  $(\delta\mathbf{E} \delta\mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}}$  и мнимой части диэлектрической проницаемости  $\operatorname{Im} \epsilon(\omega, \mathbf{k})$ , в соответствии

с (79.11) в свою очередь могут быть представлены в виде суммы четырех частей. Например, поляризуемость может быть представлена в виде

$$\alpha(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) - 1}{4\pi} = \alpha_{ff} + \alpha_{fb} + \alpha_{bf} + \alpha_{bb}. \quad (80.7)$$

Индексы  $f, b$  отмечают свободные и связанные состояния. Аналогичное разбиение имеет место и для спектральной плотности флуктуаций поля (80.5).

Для частиц, находящихся в свободном состоянии, собственные функции определяются выражениями

$$\Psi_a(\mathbf{p}) \rightarrow \Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp\left(i \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{\hbar}\right). \quad (80.8)$$

Для описания движения свободных частиц от переменных  $\mathbf{p}, \mathbf{P}$  удобней перейти к переменным  $\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b$  ( $a \neq b$ ), которые определяются формулами, соответствующими формулам (79.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{p}_e + \mathbf{p}_i, & \mathbf{p}_e &= \frac{m_e}{m_e + m_i} \mathbf{P} + \mathbf{p}, \\ \mathbf{p} &= \frac{m_i \mathbf{p}_e - m_e \mathbf{p}_i}{m_e + m_i}, & \mathbf{p}_i &= \frac{m_i}{m_e + m_i} \mathbf{P} - \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (80.9)$$

При такой замене переменных

$$f_{\mathbf{p}}(\mathbf{P}, t) \rightarrow f(\mathbf{p}_e, \mathbf{p}_i, t). \quad (80.10)$$

Функция

$$Nf_{\mathbf{p}}(\mathbf{P}, t) = Nf(\mathbf{p}_e, \mathbf{p}_i, t) \quad (80.11)$$

определяет среднее число пар частиц (атомов), в которых частицы разведены настолько далеко, что их можно считать свободными. Если степень ионизации равна нулю, то состояния (80.11) невозможны и интеграл столкновений определяется выражением (80.3) при  $\alpha = n, \beta = m$ .

Если степень ионизации не равна нулю, то для описания частично ионизованной плазмы снова можно использовать выражение (80.3), если в нем произвести замену

$$Nf(\mathbf{p}_e, \mathbf{p}_i, t) \rightarrow Nf(\mathbf{p}_e, t) Nf(\mathbf{p}_i, t), \quad (80.12)$$

т. е. заменить число свободных пар произведением средних чисел свободных частиц с теми же значениями импульсов. Это и есть дополнительное условие ослабления корреляции, о котором говорилось выше.

Чтобы записать систему уравнений для функций распределения электронов  $f(\mathbf{p}_e, t)$ , ионов  $f(\mathbf{p}_i, t)$  и атомов  $f_n(\mathbf{P}, t)$ , используем кинетическое уравнение (80.2), (80.3) и условие (80.12).

Прделаем следующее. Положим в (80.2)  $\alpha = p'$ , произведем замену переменных (80.9). Тогда наряду с (80.10) произойдет замена

$$I_{p'}(P', t) \rightarrow I(p_e, p_i, t). \quad (80.13)$$

После этого произведем последовательно интегрирование по  $p_e$ ,  $p_i$  и введем обозначения

$$f_a(p_a, t) = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int f(p_a, p_b, t) dp_b \quad (b \neq a, a = e, i) \quad (80.14)$$

для функций распределения электронов ( $a = e$ ) и ионов ( $a = i$ ).

Полученные таким путем уравнения можно представить в виде

$$\frac{\partial f_a(p_a, t)}{\partial t} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int I(p_a, p_b, t) dp_b = I_a(p_a, t) \quad (a = e, i). \quad (80.15)$$

Полагая в (80.2), (80.3)  $\alpha = n$ , получим кинетическое уравнение для функции распределения атомов  $f_n(P', t)$ :

$$\frac{\partial f_n(P', t)}{\partial t} = I_n(P', t). \quad (80.16)$$

Функции распределения электронов, ионов и атомов нормированы следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int f_a(p_a, t) dp_a &= \frac{N_a}{N} = c_a, \\ \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \sum_n \int f_n(P, t) dP &= \frac{N_{ei}}{N} = c_{ei}. \end{aligned} \quad (80.17)$$

Здесь  $c_a$  ( $a = e, i$ ) — концентрации электронов и ионов,  $c_{ei}$  — концентрация атомов. Концентрации связаны условием

$$c_a + c_{ei} = 1. \quad (80.18)$$

Рассмотрим некоторые свойства полученных таким путем интегралов столкновений.

Интеграл  $I_a(p_a, t)$  представим в виде суммы двух частей

$$I_a(p_a, t) = [I_a(p_a, t)]_1 + [I_a(p_a, t)]_2 \quad (a = e, i). \quad (80.19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} [I_a(p'_a, t)]_1 &= \frac{e_a^2}{(2\pi)^3 \hbar} \int dp''_a d\omega dk \frac{1}{k^2} \delta(\hbar k - (p'_a - p''_a)) \times \\ &\times \delta\left(\hbar\omega - \left(\frac{p_a'^2}{2m_a} - \frac{p_a''^2}{2m_a}\right)\right) \left\{ (\delta E \delta E)_{\omega, k} [f_a(p''_a, t) - f_a(p'_a, t)] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\pi\hbar \operatorname{Im} \varepsilon(\omega, k)}{|\varepsilon(\omega, k)|^2} [f_a(p''_a, t) + f_a(p'_a, t)] \right\}. \end{aligned} \quad (80.20)$$

Чтобы получить это выражение, надо в (80.3) положить  $\alpha = p'$ ,  $\beta = p''$ , произвести для  $p', P', p'', P''$  замену переменных (80.9), использовать в матричном элементе (80.6) собственные функции для свободного движения.

Так как спектральная плотность флуктуаций поля и мнимая часть диэлектрической проницаемости (см. (80.7)) состоят из четырех частей, то выражение (80.20) в свою очередь состоит из четырех частей — четырех интегралов столкновений. Они описывают четыре процесса.

$$1. \quad p'_a + p''_{1b} \leftrightarrow p''_a + p'_{1b}$$

— рассеяние свободных частиц. Везде ниже указываем реакцию в направлении  $\rightarrow$ .

$$2. \quad p'_a + m_i P''_1 \leftrightarrow p''_a + p'_{1a} + p'_{1b} \quad (a \neq b)$$

— ионизация атома из состояния  $m_i P''_1$  электронным ( $a = e$ ) или ионным ударом.

$$3. \quad p'_a + p''_a + p''_{1b} \leftrightarrow p''_a + n_1 P'_1$$

— рекомбинация в присутствии электрона ( $a = e$ ) или иона.

$$4. \quad p'_a + m_i P''_1 \leftrightarrow p''_a + n_i P'_1$$

— неупругое столкновение электрона или иона с атомом.

Во всех этих четырех процессах среднее число частиц с индексом  $a$ , взаимодействующих со свободными частицами или атомами, не меняется. Вследствие этого интеграл столкновений (80.20) обладает свойством

$$\frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int [I_a(p_a, t)]_1 d p_a = 0, \quad (80.21)$$

и, следовательно, при процессах 1—4 не меняется концентрация свободных частиц  $c_a$ .

Второй член в правой части (80.19) определяется выражением

$$\begin{aligned} [I_a(p_a, t)]_2 = & \\ = & \frac{1}{(2\pi)^3 \hbar} \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \sum_m \int d p'_b d P'' d \omega d k \frac{1}{k^2} \left| P \frac{m_b p'_a - m_a p'_b}{m_a + m_b} \cdot m \right|^2 \times \\ \times & \delta(\hbar k - (p'_a + p'_b - P'')) \delta\left(\hbar \omega - \left(\frac{p_a^2}{2m_a} + \frac{p_b^2}{2m_b} - E_m - E_{P'}\right)\right) \times \\ \times & \left[ (\delta E \delta E)_{\omega, k} (f_m(P'', t) - N f_a(p'_a, t) f_b(p'_b, t)) - \right. \\ - & \left. \frac{4\pi\hbar \operatorname{Im} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} (f_m(P'', t) + N f_a(p'_a, t) f_b(p'_b, t)) \right] \quad (b \neq a). \quad (80.22) \end{aligned}$$

Чтобы получить это выражение, надо в (80.3) положить  $\alpha = p'$ ,  $\beta = m$ , произвести замену переменных  $p'$ ,  $P'$  на  $p'_a$ ,  $p'_b$  по формулам (80.9), проинтегрировать по  $p'_b$  и произвести под интегралом замену (80.12).

Интеграл (80.22) также описывает четыре процесса. При своем им номера 5—8.

$$5. \quad p'_a + p'_b + p''_{1a} \leftrightarrow mP'' + p'_{1a}$$

— процесс рекомбинации частиц  $a$ ,  $b$  ( $a \neq b$ ).

$$6. \quad p'_a + p'_b + m_1 P''_1 \leftrightarrow mP'' + p'_{1a} + p'_{1b}$$

— процесс неупругого рассеяния, сопровождающийся обменом частицами.

$$7. \quad p'_a + p'_b + p''_{1a} + p''_{1b} \leftrightarrow mP'' + n_1 P'_1$$

— процесс двойной рекомбинации.

$$8. \quad p'_a + p'_b + m_1 P''_1 \leftrightarrow mP'' + n_1 P'_1$$

— процесс рекомбинации в присутствии атома.

Для интеграла столкновений (80.22) условие (80.21) не выполняется, т. е.

$$\frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int [I_a(p_a, t)]_2 dp_a \neq 0. \quad (80.23)$$

Таким образом, при процессах 5—8 меняется концентрация свободных частиц плазмы.

Если плазма полностью ионизована, то из всех процессов возможным оказывается лишь процесс 1. При этом вместо (80.7)

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + 4\pi\alpha_{ff}, \quad (80.24)$$

и выражение для диэлектрической проницаемости в этом случае совпадает с выражением (74.2) для полностью ионизованной плазмы. В свою очередь выражение (80.5) переходит в выражение (71.1) для спектральной плотности полностью ионизованной плазмы. Интеграл столкновений (80.22) обращается в этом случае в нуль, а интеграл столкновений (80.20) совпадает с квантовым интегралом столкновений Балеску — Ленарда в форме (74.7).

Интеграл столкновений в кинетическом уравнении для атомов также можно представить в виде

$$I_n(P', t) = [I_n(P', t)]_1 + [I_n(P', t)]_2. \quad (80.25)$$

Выражение для первой части следует из (80.3) при  $\alpha = n$ ,  $\beta = m$ . Этот интеграл описывает четыре процесса. Обозначим их

номерами 1) — 4):

- 1)  $n\mathbf{P}' + \mathbf{p}''_{1b} \leftrightarrow m\mathbf{P}'' + \mathbf{p}'_{1b},$
- 2)  $n\mathbf{P}' + m_1\mathbf{P}''_1 \leftrightarrow m\mathbf{P}'' + \mathbf{p}'_{1a} + \mathbf{p}'_{1b},$
- 3)  $n\mathbf{P}' + \mathbf{p}''_{1a} + \mathbf{p}''_{1b} \leftrightarrow m\mathbf{P}'' + n_1\mathbf{P}'_1,$
- 4)  $n\mathbf{P}' + m_1\mathbf{P}''_1 \leftrightarrow m\mathbf{P}'' + n_1\mathbf{P}'_1.$

При этих процессах среднее число атомов не меняется, поэтому

$$\sum_n \int [I_n(\mathbf{P}', t)]_1 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} d\mathbf{P}' = 0. \quad (80.26)$$

Чтобы получить вторую часть интеграла столкновений (80.25), надо в (80.3) положить  $\alpha = n$ ,  $\beta = \mathbf{p}''$ , произвести замену переменных  $\mathbf{p}'', \mathbf{P}'' \rightarrow \mathbf{p}''_a, \mathbf{p}''_b$  и замену (80.12) под интегралом. В результате получим выражение

$$\begin{aligned} [I_n(\mathbf{P}', t)]_2 = & \frac{1}{(2\pi)^3 \hbar} \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p}''_a d\mathbf{p}''_b \frac{d\omega d\mathbf{k}}{k^2} \left| P_{n, \frac{m_b \mathbf{p}''_a - m_a \mathbf{p}''_b}{m_a + m_b}} \right|^2 \times \\ & \times \delta(\hbar\mathbf{k} - (\mathbf{P}' - \mathbf{p}''_a - \mathbf{p}''_b)) \delta\left(\hbar\omega - \left(E_n + E_{\mathbf{P}'} - \frac{\mathbf{p}''_a{}^2}{2m_a} - \frac{\mathbf{p}''_b{}^2}{2m_b}\right)\right) \times \\ & \times \left\{ (\delta\mathbf{E} \delta\mathbf{E})_{\omega, \mathbf{k}} (Nf_a(\mathbf{p}''_a) f_b(\mathbf{p}''_b) - f_n(\mathbf{P}')) - \right. \\ & \left. - \frac{4\pi\hbar \operatorname{Im} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} (Nf_a(\mathbf{p}''_a) f_b(\mathbf{p}''_b) + f_n(\mathbf{P}')) \right\}. \quad (80.27) \end{aligned}$$

Этот интеграл описывает четыре процесса — обратные процессам 5—8.

- 5)  $n\mathbf{P}' + \mathbf{p}''_{1a} \leftrightarrow \mathbf{p}''_a + \mathbf{p}''_b + \mathbf{p}'_{1a},$
- 6)  $n\mathbf{P}' + \mathbf{p}''_{1a} + \mathbf{p}''_{1b} \leftrightarrow \mathbf{p}''_a + \mathbf{p}''_b + n_1\mathbf{P}'_1,$
- 7)  $n\mathbf{P}' + m_1\mathbf{P}''_1 \leftrightarrow \mathbf{p}''_a + \mathbf{p}''_b + \mathbf{p}'_{1a} + \mathbf{p}'_{1b},$
- 8)  $n\mathbf{P}' + m_1\mathbf{P}''_1 \leftrightarrow \mathbf{p}''_a + \mathbf{p}''_b + n_1\mathbf{P}'_1.$

Эти процессы меняют среднее число атомов, поэтому интеграл столкновений (80.27) обладает свойством (ср. с (80.23))

$$\sum_n \int [I_n(\mathbf{P}', t)]_2 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} d\mathbf{P}' \neq 0. \quad (80.28)$$

Интегралы столкновений (80.19), (80.25) обладают свойствами, которые удобно выразить следующим образом:

$$I(t) = \frac{N}{V} \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}(\mathbf{P}') I_{\alpha}(\mathbf{P}') \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} d\mathbf{P}' = 0 \quad (80.29)$$

при  $\varphi_{\alpha}(\mathbf{P}') = 1$ ,  $\mathbf{P}'$ ,  $E_{\alpha} + E_{\mathbf{P}'}$ . Эти свойства обеспечивают выполнение законов сохранения суммарного (в свободном и связанном состояниях) числа частиц каждого знака, полного импульса плазмы и суммарной средней энергии свободных частиц и атомов. Кроме того,

$$I(t) \geq 0 \quad \text{при} \quad \varphi_{\alpha} = -\kappa \ln f_{\alpha}(\mathbf{P}', t). \quad (80.30)$$

Это свойство обеспечивает рост суммарной энтропии частично ионизованной плазмы, изолированной от окружающей среды.

Чтобы записать выражения (80.29), (80.30) в развернутом виде, надо использовать равенство (79.11).

Рассмотрим равновесное решение уравнений (80.15), (80.16). Из кинетических уравнений для состояния равновесия следуют два уравнения

$$\begin{aligned} I(\mathbf{p}_a, t) &= [I(\mathbf{p}_a, t)]_1 + [I(\mathbf{p}_a, t)]_2 = 0, \\ I_n(\mathbf{P}, t) &= [I_n(\mathbf{P}, t)]_1 + [I_n(\mathbf{P}, t)]_2 = 0. \end{aligned} \quad (80.31)$$

Если для функций распределения электронов, ионов и атомов использовать равновесные выражения

$$f(\mathbf{p}_a) = \frac{1}{N} \exp \frac{\mu_a - E_{\mathbf{p}_a}}{\kappa T}, \quad f_n(\mathbf{P}) = \frac{1}{N} \exp \frac{\mu_{ei} - E_n - E_{\mathbf{P}}}{\kappa T}, \quad (80.32)$$

в которых

$$\begin{aligned} \mu_a &= \kappa T \ln \left[ \frac{N_a}{V} \left( \frac{2\pi\hbar^2}{m_a\kappa T} \right)^{3/2} \right], \\ \mu_{ei} &= \kappa T \ln \left[ \frac{N_{ei}}{V} \left( \frac{2\pi\hbar^2}{M\kappa T} \right)^{3/2} \frac{1}{Z} \right] \end{aligned} \quad (80.33)$$

( $Z$  — статистическая сумма), то этого еще недостаточно, чтобы удовлетворить уравнениям (80.31). На химические потенциалы  $\mu_e$ ,  $\mu_i$ ,  $\mu_{ei}$  надо еще наложить условие

$$\mu_e + \mu_i = \mu_{ei}, \quad (80.34)$$

которое является условием химического равновесия.

Из выражений (80.33), (80.34) следует, что условие химического равновесия можно записать в виде

$$\frac{c_e c_i}{c_{ei}} \equiv \frac{n_e n_i}{n_{ei}} = \left( \frac{\mu_{ei} \kappa T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{1}{Z} \quad (80.35)$$

— формула Саха.



Таким образом, из кинетических уравнений (80.15), (80.16) следует, что в равновесном состоянии функции распределения атомов, электронов и ионов — распределения Максвелла — Больцмана, дополненные условием химического равновесия.

На основе кинетических уравнений (80.15), (80.16) можно получить газодинамические уравнения для частично ионизованной плазмы с учетом химических превращений [22].

В работе [37] по такой же схеме построены кинетические уравнения для системы заряженных частиц с электромагнитным взаимодействием.

### § 81. Химически реагирующие газы. Исходная модель

Рассмотрим трехкомпонентный газ, состоящий из атомов  $a, b$  и молекул  $ab$ . Здесь снова можно рассмотреть два крайних состояния: молекулярный газ (степень диссоциации равна нулю) и полностью диссоциированный газ — смесь двух атомарных газов.

Примем за основу, как и в теории частично ионизованной плазмы, состояние, в котором степень диссоциации равна нулю — молекулярный газ. Рассмотрим газ настолько разреженный, что можно ограничиться приближением парных столкновений молекул. Тогда в качестве исходного достаточно взять уравнение для двухчастичной (переменных двух молекул) матрицы плотности. Обозначим ее через

$$\rho_{a_1 b_1 a_2 b_2} = \rho_{a_1 b_1 a_2 b_2}(\mathbf{r}'_{a_1}, \mathbf{r}'_{b_1}, \mathbf{r}'_{a_2}, \mathbf{r}'_{b_2}, \mathbf{r}''_{a_1}, \mathbf{r}''_{b_1}, \mathbf{r}''_{a_2}, \mathbf{r}''_{b_2}, t), \quad (81.1)$$

где «1», «2» — индексы молекул, а  $a, b$  — индексы атомов в молекулах.

Введем обозначения:

$$\hat{H}_{ab} = -\frac{\hbar^2}{2m_a} \Delta_{r_a} - \frac{\hbar^2}{2m_b} \Delta_{r_b} + \Phi_{ab} \quad (81.2)$$

для оператора Гамильтона молекулы,

$$\hat{H}_{a_1 b_1 a_2 b_2}^0 = \hat{H}_{a_1 b_1} + \hat{H}_{a_2 b_2} \quad (81.3)$$

для оператора Гамильтона двух невзаимодействующих молекул,

$$U_{a_1 b_1 a_2 b_2} = U(\mathbf{r}_{a_1}, \mathbf{r}_{b_1}, \mathbf{r}_{a_2}, \mathbf{r}_{b_2}) \quad (81.4)$$

для потенциальной энергии взаимодействия двух молекул.

Если обе взаимодействующие молекулы находятся в диссоциированном состоянии, то

$$U_{a_1 b_1 a_2 b_2} = \Phi_{a_1 a_2} + \Phi_{a_1 b_2} + \Phi_{b_1 a_2} + \Phi_{b_1 b_2}, \quad (81.5)$$

где  $\Phi_{ab}$  — потенциал взаимодействия атомов  $a, b$ . Если в диссоциированном состоянии находится только одна из молекул пары,

например «2», то

$$U_{a_1 b_1 a_2 b_2} = V_{a_1 b_1 a_2} + V_{a_1 b_1 b_2}. \quad (81.6)$$

Таким образом, потенциал  $U$  аддитивен только для случая свободных атомов. В общем случае следует задать потенциалы

$$U_{a_1 b_1 a_2 b_2}, \quad V_{a_1 b_1 a_2}, \quad V_{a_1 b_1 b_2}, \quad \Phi_{aa}, \quad \Phi_{ab}, \quad \Phi_{bb}. \quad (81.7)$$

Уравнение для матрицы плотности в приближении парных столкновений молекул можно записать по аналогии с уравнением (66.10):

$$\begin{aligned} \left[ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - (\hat{H}_{a_1 b_1 a_2 b_2}^0(r'_{a_1}, r'_{b_1}, r'_{a_2}, r'_{b_2}) - \hat{H}_{a_1 b_1 a_2 b_2}^0(r''_{a_1}, r''_{b_1}, r''_{a_2}, r''_{b_2})) \right] \times \\ \times (\rho_{a_1 b_1 a_2 b_2} - \rho_{a_1 b_1} \rho_{a_2 b_2}) = [U_{a_1 b_1 a_2 b_2}(r'_{a_1}, r'_{b_1}, r'_{a_2}, r'_{b_2}) - \\ - U_{a_1 b_1 a_2 b_2}(r''_{a_1}, r''_{b_1}, r''_{a_2}, r''_{b_2})] \rho_{a_1 b_1 a_2 b_2}. \end{aligned} \quad (81.8)$$

В приближении теории возмущений по взаимодействию молекул в правой части этого уравнения

$$\rho_{a_1 b_1 a_2 b_2} = \rho_{a_1 b_1} \rho_{a_2 b_2}, \quad (81.9)$$

и тогда мы получаем уравнение, аналогичное уравнению (69.1).

## § 82. Кинетические уравнения для химически реагирующих газов

Вывод кинетических уравнений, как и в § 79, можно провести в два этапа. Сначала можно получить кинетическое уравнение для функции распределения двух молекул, а на втором этапе вывести из него (используя условие ослабления корреляции при образовании свободных частиц) три кинетических уравнения для атомов и молекул.

Вывод кинетических уравнений для химически реагирующих газов проведен в работе [38]\*). Приведем здесь лишь некоторые результаты.

Используем приближение теории возмущений по взаимодействию молекул. Для пространственно однородного молекулярного газа в диагональном приближении кинетическое уравнение для функции распределения  $f_{n_{a_1 b_1}}(\mathbf{P}'_{a_1 b_1}, t)$  можно записать в виде

$$\frac{\partial f_{n_{a_1 b_1}}}{\partial t} = I_{n_{a_1 b_1}}(\mathbf{P}'_{a_1 b_1}, t). \quad (82.1)$$

\*) См. также новые работы [45, 46].

Интеграл столкновений определяется выражением

$$I_{n_{a_1 b_1}}(\mathbf{P}'_{a_1 b_1}, t) = \frac{2\pi N}{\hbar (2\pi\hbar)^6} \sum_{m_{a_1 b_1}, n_{a_1 b_1}, m_{a_2 b_2}} \int d\mathbf{P}''_{a_1 b_1} d\mathbf{P}'_{a_2 b_2} d\mathbf{P}''_{a_2 b_2} \times \\ \times |U_{n_{a_1 b_1}, m_{a_1 b_1}, n_{a_2 b_2}, m_{a_2 b_2}} [(\mathbf{P}'_{a_1 b_1} - \mathbf{P}''_{a_1 b_1})/\hbar]|^2 \delta(\mathbf{P}'_{a_1 b_1} + \mathbf{P}'_{a_2 b_2} - \mathbf{P}''_{a_1 b_1} - \mathbf{P}''_{a_2 b_2}) \times \\ \times \delta(E_{n_{a_1 b_1}} + E_{\mathbf{P}'_{a_1 b_1}} + E_{n_{a_2 b_2}} + E_{\mathbf{P}'_{a_2 b_2}} - E_{m_{a_1 b_1}} - E_{\mathbf{P}''_{a_1 b_1}} - E_{m_{a_2 b_2}} - E_{\mathbf{P}''_{a_2 b_2}}) \times \\ \times [f_{m_{a_1 b_1}}(\mathbf{P}''_{a_1 b_1}, t) f_{m_{a_2 b_2}}(\mathbf{P}''_{a_2 b_2}, t) - f_{n_{a_1 b_1}}(\mathbf{P}'_{a_1 b_1}, t) f_{n_{a_2 b_2}}(\mathbf{P}'_{a_2 b_2}, t)]. \quad (82.2)$$

Здесь использованы обозначения:  $N$  — число молекул при нулевой степени диссоциации,

$$U_{n_{a_1 b_1}, m_{a_1 b_1}, n_{a_2 b_2}, m_{a_2 b_2}}(\mathbf{k}) = \int U(\mathbf{k}, \mathbf{r}_{a_1 b_1}, \mathbf{r}_{a_2 b_2}) \Psi_{n_{a_1 b_1}}^*(\mathbf{r}_{a_1 b_1}) \Psi_{n_{a_2 b_2}}^*(\mathbf{r}_{a_2 b_2}) \times \\ \times \Psi_{m_{a_1 b_1}}(\mathbf{r}_{a_1 b_1}) \Psi_{m_{a_2 b_2}}(\mathbf{r}_{a_2 b_2}) d\mathbf{r}_{a_1 b_1} d\mathbf{r}_{a_2 b_2} \quad (82.3)$$

— матричный элемент потенциальной энергии взаимодействия молекул. В (82.3)  $\Psi_{n_{ab}}(\mathbf{r}_{ab})$  — собственные функции гамильтониана  $\hat{H}_{ab}$ ,  $U(\mathbf{k}, \mathbf{r}_{a_1 b_1}, \mathbf{r}_{a_2 b_2})$  — компонента Фурье потенциальной энергии взаимодействия молекул

$$U_{a_1 b_1 a_2 b_2} = U_{a_1 b_1 a_2 b_2}(\mathbf{R}_{a_1 b_1} - \mathbf{R}_{a_2 b_2}, \mathbf{r}_{a_1 b_1}, \mathbf{r}_{a_2 b_2}).$$

В приближении упругих столкновений из (82.3)

$$U_{n_{a_1 b_1}, m_{a_1 b_1}, n_{a_2 b_2}, m_{a_2 b_2}}(\mathbf{k}) = v(\mathbf{k}) \delta_{n_{a_1 b_1}, m_{a_1 b_1}} \delta_{n_{a_2 b_2}, m_{a_2 b_2}} \quad (82.4)$$

из (82.1) следует выражение  $I(\mathbf{P}_{ab}, t) = \sum_{n_{ab}} I_{n_{ab}}(\mathbf{P}_{ab}, t)$ , совпадающее для одноатомного газа с выражением (69.11) для интеграла столкновений Боголюбова — Гурова.

Из выражения (82.2) можно получить интеграл столкновений и для системы частиц с кулоновским взаимодействием, но без учета поляризации, так как здесь с самого начала была использована теория возмущений. Для этого надо использовать представление  $U$  в виде (81.5). Тогда для матричного элемента (82.3) получим выражение

$$\left| U_{n_{a_1 b_1}, m_{a_1 b_1}, n_{a_2 b_2}, m_{a_2 b_2}}(\mathbf{k}) \right|^2 = \left( \frac{4\pi}{k^2} \right)^2 |P_{n_{a_1 b_1}, m_{a_1 b_1}}(\mathbf{k})|^2 |P_{n_{a_2 b_2}, m_{a_2 b_2}}(\mathbf{k})|^2. \quad (82.5)$$

Здесь использовано обозначение (80.6) для матричного элемента.

Теперь, как и в § 80, используя условие, аналогичное (80.12), можно получить систему трех уравнений для функций распределения атомов  $a$ ,  $b$  и молекул. Эти уравнения имеют такую же структуру, как и уравнения (80.15), (80.16) [38].

### § 83. Уравнения для концентраций свободных и связанных заряженных частиц. Коэффициенты ионизации и рекомбинации

Рассмотрим неравновесное состояние пространственно однородной частично ионизованной плазмы. Будем предполагать, что уже установилось распределение Максвелла — Больцмана для электронов, ионов и атомов, но состояние химического (ионизационного) равновесия еще не наступило. Вследствие этого концентрации заряженных частиц и атомов не удовлетворяют условию ионизационного равновесия (80.35).

Чтобы получить, например, уравнение для  $n_a(t)$ , умножим кинетическое уравнение (80.15) на  $nV/(2\pi\hbar)^3$ , проинтегрируем по  $p_a$ , подставим выражения (80.5), (80.4), (80.7) для функций  $(\delta E \delta E)_{\omega, \mathbf{k}}$ ,  $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$  и используем распределения Максвелла — Больцмана (80.32). В результате получим следующее уравнение [22]:

$$\frac{dn_a}{dt} = (\alpha n_a n_{ab} - \beta n_a^i) + (\alpha_1 n_{ab}^2 - \beta_1 n_a^2 n_{ab}) + (\alpha_2 n_{ab}^2 - \beta_2 n_a^2 n_b^2) + (\alpha_3 n_a^2 n_{ab} - \beta_3 n_a^2 n_{ab}). \quad (83.1)$$

Здесь принято во внимание равенство концентраций электронов и ионов. В уравнении (83.1)  $\alpha$  — коэффициент ударной ионизации,  $\beta$  — коэффициент тройной рекомбинации (два электрона и ион, два иона и электрон),  $\alpha_1$  — коэффициент ионизации при столкновении двух атомов,  $\beta_1$  — коэффициент рекомбинации при тройном столкновении электрона, иона и атома,  $\beta_2$  — коэффициент рекомбинации четырех заряженных частиц, в результате которой образуются два атома,  $\alpha_2$  — соответствующий коэффициент ионизации,  $\alpha_3$ ,  $\beta_3$  — коэффициенты процессов обмена.

Приведем для примера выражения для коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$  [22]:

$$\alpha = \frac{4V}{(2\pi\hbar)^3} \sum_c e_c^2 \sum_m \int dp' dP' dP'' dp'_c dp''_c d\omega dk \frac{|P_{P'm}|^2}{k^2 |\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} \times \\ \times \delta(\mathbf{P}' + \mathbf{p}'_c - (\mathbf{P}'' + \mathbf{p}'_c)) \times \\ \times \delta\left(\frac{p'^2}{2\mu} + \frac{P'^2}{2M} + \frac{p_c''^2}{2m_c} - \left(E_m + \frac{P''^2}{2M} + \frac{p_c'^2}{2m_c}\right)\right) \times \\ \times \delta(\hbar\mathbf{k} - (\mathbf{P}' - \mathbf{P}'')) \delta\left(\hbar\omega - \left(\frac{p'^2}{2\mu} + \frac{P'^2}{2M} - E_m - \frac{P''^2}{2M}\right)\right) \times \\ \times \frac{1}{[2\pi(m_c M)^{1/2} \kappa T]^3 Z} \exp\left[-\left(E_m + \frac{P''^2}{2M} + \frac{p_c'^2}{2m_c}\right)(\kappa T)^{-1}\right], \quad (83.2)$$

$$\beta = (2\pi\hbar^2/\mu\kappa T)^{1/2} Z\alpha. \quad (83.3)$$

Выполним в выражении (83.2) интегрирование, предполагая, что поляризационные эффекты несущественны ( $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1$ ), ионизация осуществляется электронами, атомы покоятся ( $M = \infty$ ), ионизация происходит с основного уровня. При этих условиях из (83.2) находим следующее выражение для коэффициента ионизации:

$$\alpha = \frac{2^{10}}{3^7} 35 e^{-1/2} \frac{a_0^3 \mu e^4}{\hbar^3} \frac{\kappa T}{I} \exp(-I/\kappa T), \quad (83.4)$$

где  $I$  — потенциал ионизации,  $a_0$  — боровский радиус. При получении этой формулы использовано выражение для матричного элемента  $|\mathbf{r}'_m(\mathbf{k})|^2$  при  $m = 0$  (см. [40], стр. 667).

При расчете коэффициента ионизации в классической теории [41] получается результат, отличающийся от (83.4) в [41] предэкспоненциальным множителем (вместо  $\kappa T/I$  в (83.4) стоит  $(\kappa T/I)^{1/2}$ ). Вследствие этого вблизи порога зависимость эффективного сечения от превышения над порогом не является линейной.

Выражение (83.4) получено в борновском приближении. Это приближение используется и при численных расчетах (см., например, [42]).

#### § 84. Влияние флуктуаций электромагнитного поля на кинетические процессы в частично ионизованной плазме

Используя схему, рассмотренную в §§ 79, 80, можно учесть в кинетических уравнениях (80.15), (80.16) и процессы, которые обусловлены взаимодействием заряженных частиц с флуктуирующим поперечным электромагнитным полем [37].

Дополнительные вклады в интегралы столкновений (80.19), (80.20), (80.22) для заряженных частиц и в интегралы столкновений (80.25), (80.3) (при  $\alpha = n$ ,  $\beta = m$ ), (80.27), обусловленные флуктуациями поперечного поля, определяются аналогичными формулами. Например, дополнительный вклад в выражение  $[I_a(\mathbf{p}'_a, t)]_1$  имеет вид [37]

$$\begin{aligned} [I_a(\mathbf{p}'_a, t)]_1 = & \frac{e_a^2}{2(2\pi)^3 \hbar} \int d\mathbf{p}''_a d\omega dk \frac{[k v'_a]^2}{k^2 \omega^2} \delta(\hbar \mathbf{k} - (\mathbf{p}'_a - \mathbf{p}''_a)) \times \\ & \times \delta\left(\hbar \omega - \left(\frac{p_a'^2}{2m_a} - \frac{p_a''^2}{2m_a}\right)\right) \left\{ (\delta \mathbf{E}^\perp \delta \mathbf{E}^\perp)_{\omega \mathbf{k}} [f_a(\mathbf{p}''_a, t) - f_a(\mathbf{p}'_a, t)] - \right. \\ & \left. - \frac{8\pi \hbar \operatorname{Im} \varepsilon^\perp(\omega, \mathbf{k}) \omega^4}{|\omega^2 \varepsilon^\perp(\omega, \mathbf{k}) - c^2 k^2|^2} [f_a(\mathbf{p}''_a, t) + f_a(\mathbf{p}'_a, t)] \right\}. \quad (84.1) \end{aligned}$$

Здесь  $(\delta \mathbf{E}^\perp \delta \mathbf{E}^\perp)_{\omega \mathbf{k}}$  — спектральная плотность флуктуаций поперечного электрического поля,  $\varepsilon^\perp(\omega, \mathbf{k})$  — соответствующая

диэлектрическая проницаемость. Как и для кулоновской плазмы, эти функции можно представить в виде (ср. с (80.7))

$$(\delta \mathbf{E}^\perp \delta \mathbf{E}^\perp)_{\omega \mathbf{k}} = (\delta \mathbf{E}^\perp \delta \mathbf{E}^\perp)_{\omega, \mathbf{k}}^{ff} + (\dots)^{fb} + (\dots)^{bf} + (\dots)^{bb}, \quad (84.2)$$

$$\varepsilon^\perp(\omega, \mathbf{k}) = 1 + 4\pi(\alpha_{ff} + \alpha_{fb} + \alpha_{bf} + \alpha_{bb}).$$

Выражения для этих функций приведены в работе [37].

В равновесном состоянии спектральная плотность флуктуаций поперечного поля определяется выражением

$$(\delta \mathbf{E}^\perp \delta \mathbf{E}^\perp)_{\omega \mathbf{k}} = \frac{16\pi\hbar\omega^4 \operatorname{Im} \varepsilon^\perp(\omega, \mathbf{k})}{|\omega^2 \varepsilon^\perp(\omega, \mathbf{k}) - c^2 k^2|^2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1} \right). \quad (84.3)$$

При  $\hbar \rightarrow 0$  это выражение переходит в (39.42). Соответствующее выражение для временной спектральной плотности имеет вид

$$(\delta \mathbf{E}^\perp \delta \mathbf{E}^\perp)_\omega = \frac{4\hbar\omega^3}{c^3} \sqrt{\operatorname{Re} \varepsilon^\perp} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1} \right) \equiv$$

$$\equiv \frac{2\hbar\omega^3}{c^3} \sqrt{\operatorname{Re} \varepsilon^\perp} + 4\pi^2 \rho_\omega^\perp. \quad (84.4)$$

Здесь  $\rho_\omega^\perp$  — температурная часть функции Планка.

Используя выражения (84.2), можно представить интегралы столкновений, определяемые флуктуациями поперечного поля, в виде суммы восьми членов и произвести классификацию всех вкладов, аналогичную той, которая проведена в § 80 для кулоновской частично ионизованной плазмы.

Интегралы столкновений учитывают взаимодействие частиц в поляризованном приближении (борновское приближение, дополненное учетом эффектов поляризации плазмы). Вследствие этого в них, наряду с обычными процессами фотоионизации, фоторекомбинации, излучения, поглощения и т. д., учитываются «аномальные» (сверхсветовые) эффекты [43]. К ним, кроме эффекта Черенкова, относятся аномальный эффект Доплера, аномальное торможение, а также эффекты спонтанной и вынужденной ионизации атомов с испусканием квантов, вынужденной рекомбинации с поглощением квантов и т. д.

Приведем для иллюстрации выражения для коэффициентов «нормальной» фотоионизации и фоторекомбинации ( $\alpha_n$  и  $\beta_n$ ) в приближении бесконечной массы тяжелых частиц [37]:

$$\beta_n = \frac{V}{2\hbar} \frac{1}{(2\pi m_e kT)^{3/2}} \sum_m \int d\omega d\mathbf{p} |r_{pm}^\perp|^2 \delta(\hbar\omega - |E_m| - \frac{p^2}{2m_e}) \times$$

$$\times (\delta \mathbf{E}^\perp \delta \mathbf{E}^\perp)_\omega \exp(-p^2/2m_e kT). \quad (84.5)$$

Здесь  $|r_{pm}^\perp|^2$  — соответствующий матричный элемент,  $(\delta \mathbf{E}^\perp \delta \mathbf{E}^\perp)_\omega$  — спектральная функция поля без учета вклада нулевых коле-

баний. В равновесном состоянии эта функция совпадает с  $4\pi^2\rho_\omega^+$  (см. (84.4)).

Из выражения (84.5) можно определить коэффициент фотоионизации, если произвести замену

$$(\delta E^\perp \delta E^\perp)_\omega \rightarrow \left(\frac{m_e \kappa T}{2\pi \hbar^2}\right)^{1/2} \frac{1}{Z} \exp(-\hbar\omega/\kappa T) (\delta E^\perp \delta E^\perp)_\omega. \quad (84.6)$$

Для процесса рекомбинации на основной уровень выражение (84.5) принимает вид [37]

$$\beta_n = \frac{2^6 e^{-1}}{3\hbar} \left(\frac{2\pi \hbar^2}{m_e \kappa T}\right)^{1/2} a_0^3 \int_{\omega > I/\hbar} \exp\left[-\frac{\hbar\omega - I}{\kappa T}\right] (\delta E^\perp \delta E^\perp)_\omega d\omega. \quad (84.7)$$

Отсюда, используя замену (84.6), находим соответствующее выражение для коэффициента фотоионизации [37]

$$\alpha_n = \frac{2^8 e^{-1}}{3\hbar} a_0^3 \int_{\omega > I/\hbar} (\delta E^\perp \delta E^\perp)_\omega d\omega. \quad (84.8)$$

При равновесном распределении флуктуаций поля, когда  $(\delta E^\perp \delta E^\perp)_\omega = 4\pi^2\rho_\omega^+$  (см. (84.4)) и  $I \gg \kappa T$ , из (84.8) находим [37]

$$\alpha_n = \frac{2^{10} e^{-1}}{3} a_0^3 \frac{I^3 \sqrt{\text{Re } \varepsilon(I/\hbar)}}{\hbar^3 c^3} \frac{\kappa T}{\hbar} \exp(-I/\kappa T). \quad (84.9)$$

Этот результат лишь численным множителем отличается от полученного квазиклассическим методом (см., например, (6.96) в [41]).

Более подробно изложенные здесь вопросы рассмотрены в работе [37].

Настоящую главу следует рассматривать лишь как краткое введение в кинетическую теорию частично ионизованной плазмы и кинетическую теорию химически реагирующих газов. В этой области еще много нерешенных проблем. Одна из них — построение кинетической теории неидеальных химически реагирующих систем.

## ЛИТЕРАТУРА

### К первой части

1. Л. Больцман, Лекции по теории газов, Гостехиздат, 1956.
2. С. Чепмен, Т. Каулинг, Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, 1960.
3. Дж. Гиршфельдер, Ч. Кертис, Р. Берд, Молекулярная теория газов и жидкостей, ИЛ, 1961.
4. Н. Н. Боголюбов, Проблемы динамической теории в статистической физике, Гостехиздат, 1946.
5. Дж. Уленбек, Дж. Форд, Лекции по статистической механике, «Мир», 1965.
6. И. Пригожин, Неравновесная статистическая механика, «Мир», 1964.
7. Л. Каданов, Г. Бейм, Квантовая статистическая механика, «Мир», 1964.
8. Ю. Л. Климонтович, Статистическая теория неравновесных процессов в плазме, Изд. МГУ, 1964.
9. К. П. Гуров, Основания кинетической теории, «Наука», 1966.
10. М. Н. Коган, Динамика разреженного газа, «Наука», 1967.
11. Р. Балеску, Статистическая механика заряженных частиц, «Мир», 1967.
12. В. П. Силин, Введение в кинетическую теорию газов, «Наука», 1971.
13. Д. Н. Зубарев, Неравновесная статистическая термодинамика, «Наука», 1971.
14. К. Черчиньяни, Математические методы в кинетической теории, «Мир», 1973.
15. И. Шарковский, Т. Джонстон, М. Бачинский, Кинетика частиц плазмы, Атомиздат, 1969.
16. Lectures in theoretical physics, v. 9C, Kinetic theory, Gordon and Breach, N. Y., 1967.
17. Ю. Л. Климонтович, О кинетическом уравнении Больцмана для неидеального газа, ЖЭТФ 60, 1352 (1971).
18. Ю. Л. Климонтович, О кинетических уравнениях для классической неидеальной плазмы, ЖЭТФ 62, 1770 (1972).
19. J. Veinstock, Cluster formulation of the exact equation for the evolution of a classical many-body system, Phys. Rev. 132, 454 (1963).
20. G. Goldman, E. Frieman, Logarithmic density behavior of a nonequilibrium Boltzmann gas, J. Math. Phys. 8, 1410 (1967).
21. J. Dorfman, E. Cohen, Difficulties in the kinetic theory of dense gases, J. Math. Phys. 8, 282 (1967).
22. E. Cohen, The generalisation of the Boltzmann equation to higher densities, In the book «Statistical mechanics at the turn of the decade», ed. by E. Cohen, N. Y., 1971.
23. Ю. Л. Климонтович, О неравновесных флуктуациях в газе, ТМФ 9, 109 (1971).
24. Ю. Л. Климонтович, Кинетические уравнения для неидеального газа и неидеальной плазмы, УФН 110, 537 (1973).
25. Б. Б. Кадомцев, О флуктуациях в газе, ЖЭТФ 32, 943 (1957).



26. *H. Green*, Boltzmann's equation in quantum mechanics, Proc. Roy. Soc. A66, 325 (1953).
27. *K. Baerwinkel, S. Grossmann*, On the derivation of the Boltzmann-Landau equation from the quantum mechanical hierarchy, Z. Phys. 198, 277 (1967).
28. *K. Baerwinkel*, Die Vielteilchen T-Matrix und ihre Anwendung in der Theorie realer Gase von mittlerer Dichte 1, 2, Z. Naturforschung 24a, 22, 38 (1969).
29. *Ю. Л. Климонтович, В. Эбелинг*, Квантовые кинетические уравнения для неидеального газа и неидеальной плазмы, ЖЭТФ 63, 905 (1972).
30. *Н. Н. Боголюбов, К. П. Гуров*, Кинетические уравнения в квантовой механике, ЖЭТФ 17, 714 (1947).
31. *В. П. Силин*, Об интеграле столкновений для заряженных частиц, ЖЭТФ 40, 1768 (1961).
32. *R. Balescu*, Approach to equilibrium of quantum plasma, Phys. of Fluids 4, 94 (1961).
33. Сб. статей «Физика простых жидкостей», «Мир», 1971.
34. *Н. П. Коваленко, И. З. Фишер*, Метод интегральных уравнений в статистической теории жидкостей, УФН 108, 209 (1972).
35. *Ю. Л. Климонтович*, Интегральные уравнения для парной корреляционной функции плотных газов и плазмы, Письма в ЖЭТФ 15, 495 (1972).
36. *H. Green*, The molecular theory of fluids, Oxford, 1953.
37. *Ю. Л. Климонтович*, Н-теорема Больцмана для неидеального газа, ЖЭТФ 63, 150 (1972).
38. *Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, Л. П. Питаевский*, Вычисление флуктуаций величин, определяемых кинетическими уравнениями, Тр. ИЗМИРАН, в. 17 (27), 239 (1960).
39. *Ш. М. Коган, А. Я. Шульман*, К теории флуктуаций в неравновесном электронном газе, ЖЭТФ 56, 862 (1969); ФТТ 11, 308 (1969).
40. *С. В. Ганцевич, В. Л. Гуревич, Р. Катилос*, Флуктуации в полупроводниках в сильном электрическом поле и рассеяние света горячими электронами, ЖЭТФ 57, 503 (1969).
41. *С. В. Ганцевич, В. Л. Гуревич, Р. Катилос*, О связи между различными методами теории флуктуаций в неравновесном состоянии, ЖЭТФ 59, 533 (1970).
42. *П. М. Томчук, В. А. Шендеровский*, Рассеяние и трансформация волн на флуктуациях в неравновесной плазме полупроводника, Препринт Ин-та физики АН УССР, № 12, 1971.
43. *В. Н. Жигулев*, Исследование уравнений Боголюбова для сильнокоррелированных статистических систем, ТМФ 7, 106 (1971); К проблеме фундаментальных характеристик движения сплошной среды, ТМФ 7, 271 (1971).
44. *Б. И. Садовников*, Уравнения для классических функций Грина в кинетическом приближении, ДАН СССР 164, 785 (1965); Асимптотика классических функций Грина в «вязком гидродинамическом приближении», ДАН СССР 164, 1024 (1965).
45. *Ш. М. Коган*, К теории флуктуаций в неравновесном газе с парными столкновениями, ТМФ 10, 143 (1972).
46. *I. Prigogine, G. George, J. Rae*, Classical dynamics as an eigenvalue problem, Physica 56, 25 (1971).
47. *F. Henin*, A theorem in dynamics of correlation, Physica 54, 385 (1971).
48. *R. Balescu, L. Brenig, J. Wallenborn*, Subdynamics of constrained many body systems and the theory of transport coefficients, Physica 52, 29 (1971).
49. *R. Balescu*, Dynamical correlation patterns: a new representation of the Liouville equation, Physica 56, 1 (1971).
50. *Д. Н. Зубарев, В. П. Калашиков*, Эквивалентность некоторых методов в статистической механике необратимых процессов, ТМФ 7, 372 (1971).

51. С. В. Пелетминский, В. Д. Цуканов, К кинетике систем в переменных внешних полях, ТМФ 7, 395 (1971).
52. Д. Н. Зубарев, М. Ю. Новиков, Обобщенная формулировка граничного условия к уравнению Лиувилля и цепочке Б—Б—Г—К—И, ТМФ 13, 403 (1972).
53. Ю. Л. Климонтович, Е. Ф. Сливко, Кинетическое уравнение для неидеального газа с учетом тройных столкновений, ТМФ 19, 137 (1974).
54. К. Kawasaki, J. Oppenheim, Logarithmic term in the density expansion of transport coefficients, Phys. Rev. A139, 1763 (1965).
55. J. Kestin, E. Poynoc, J. Sengers, On the density expansion for viscosity in gases, Physica 54, 1 (1971).
56. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, «Наука», 1964.
57. С. М. Рытов, Теория электрических флуктуаций и теплового излучения, Изд. АН СССР, 1953.
58. М. Л. Левин, С. М. Рытов, Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике, «Наука», 1967.
59. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957.
60. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, О гидродинамических флуктуациях, ЖЭТФ 32, 618 (1957).
61. И. З. Фишер, Статистическая теория жидкостей, Физматгиз, 1961.
62. The Boltzmann equation theory and application, Ed. E. Cohen, W. Thirring, Springer-Verlag, 1973.
63. Проблемы теории плазмы, Под ред. А. Г. Ситенко, Киев, 1972.
64. G. Sandri, The foundations of nonequilibrium statistical mechanics, Ann. Phys. 24, 332 (1963); J. Hopfield, A. Batin, New approach to transport theory in classical gases, Phys. Rev. 168, 193 (1968).
65. Л. В. Кац, В. М. Конторович, С. С. Моисеев, В. Е. Новиков, Степенные решения кинетического уравнения Больцмана, описывающие распределения частиц с потоком по спектру, Письма в ЖЭТФ 21, в. 1, 13 (1975).
66. N. N. Bogolubov, Microscopic solutions of the Boltzmann—Enskog equation in the kinetic theory of hard spheres, Препринт ОИЯИ Е-4-8789, Дубна, 1975 (см. также ТМФ 24, 242 (1975)).

#### К о второй части

1. Л. Д. Ландау, Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия, ЖЭТФ 7, 203 (1937).
2. А. А. Власов, О вибрационных свойствах электронного газа, ЖЭТФ 8, 231 (1938).
3. А. А. Власов, Теория многих частиц, Гостехиздат, 1950.
4. Н. Н. Боголюбов, Проблемы динамической теории в статистической физике, Гостехиздат, 1946.
5. A. Lenard, On Bogolubov's kinetic equation for a spatially homogeneous plasma, Ann. Phys. 3, 390 (1960).
6. R. Balescu, Irreversible processes in ionized gases, Phys. of Fluid 3, 52 (1960).
7. Ю. Л. Климонтович, О кинетических уравнениях для классической неидеальной плазмы, ЖЭТФ 62, 1770 (1972).
8. Ю. Л. Климонтович, Статистическая теория неравновесных процессов в плазме, Изд. МГУ, 1964.
9. Ю. Л. Климонтович, Релятивистские уравнения для плазмы I, II, ЖЭТФ 37, 735 (1959); 38, 1212 (1960).
10. В. П. Силин, Введение в кинетическую теорию газов, «Наука», 1971.
11. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, «Наука», 1957.

12. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, 1961.
13. Сб. статей «Вопросы теории плазмы», Под ред. М. А. Леонтовича, вв. 1—8, Атомиздат, 1963—1974.
14. В. Л. Гинзбург, А. А. Рухадзе, Волны в магнитоактивной плазме, «Наука», 1975.
15. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, Коллективные колебания в плазме, Атомиздат, 1964; Электродинамика плазмы, «Наука», 1974.
16. А. В. Гуревич, А. Б. Шварцбург, Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере, «Наука», 1973.
17. В. П. Силин, Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму, «Наука», 1973.
18. Т. Х. Стэкс, Теория плазменных волн, Атомиздат, 1965.
19. В. Д. Шафранов, Электромагнитные волны в плазме, в сб. [13], в. 3, 3 (1963).
20. Б. Б. Кадомцев, Турбулентность плазмы, в сб. [13], в. 4, 188 (1964).
21. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, Нелинейные колебания разреженной плазмы, Ядерный синтез 1, 82 (1961).
22. В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, «Наука», 1967.
23. А. А. Веденов, Теория турбулентности плазмы, ИНИ АН СССР, 1965.
24. В. Н. Цытович, Теория турбулентной плазмы, Атомиздат, 1971.
25. Физические основы термоэмиссионного преобразования энергии, Под ред. И. П. Стаханова, Атомиздат, 1973.
26. Е. К. Завойский, Л. И. Рудаков, Коллективные процессы в плазме и турбулентный нагрев, «Знание», 1967.
27. А. Г. Ситенко, Электромагнитные флуктуации в плазме, Изд. ХГУ, 1965.
28. А. Б. Михайловский, Теория плазменных неустойчивостей, т. I, Неустойчивости однородной плазмы, т. II, Неустойчивости неоднородной плазмы, Атомиздат, 1971, 1972.
29. Ю. Л. Климонтович, Вопросы статистической теории взаимодействия атомов с излучением, УФН 101, 578 (1970).
30. Л. М. Горбунов, В. П. Силин, Теория явлений переноса в неизотермической плазме, ЖЭТФ 34, 385 (1964).
31. В. П. Силин, К теории электромагнитных флуктуаций, ЖЭТФ 41, 969 (1961).
32. С. Т. Беляев, Г. И. Будкер, Релятивистское кинетическое уравнение, ДАН СССР 107, 807 (1956).
33. Ю. Л. Климонтович, В. А. Пучков, Влияние поляризации плазмы на кинетические свойства при наличии сильного электрического поля, ЖЭТФ 67, 556 (1974).
34. В. И. Перель, Г. М. Элиашберг, Поглощение электромагнитных волн в плазме, ЖЭТФ 41, 886 (1962).
35. В. П. Силин, Нелинейная высокочастотная проводимость, ЖЭТФ 47, 2254 (1964).
36. N. Rostoker, Kinetic equation with a constant magnetic field, Phys. of Fluids 3, 922 (1961).
37. В. М. Елеонский, П. С. Зырянов, В. П. Силин, Интеграл столкновений заряженных частиц в сильном магнитном поле, ЖЭТФ 42, 896 (1962).
38. Ю. Л. Климонтович, В. П. Силин, К теории флуктуаций распределения частиц в плазме, ЖЭТФ 42, 296 (1962).
39. С. Т. Беляев, Кинетическое уравнение для разреженных газов в сильном поле, В сб. «Физика плазмы и проблемы термоядерных реакций», т. 3, стр. 50, 66, Изд. АН СССР, 1958.
40. Ю. Л. Климонтович, Кинетические уравнения для неидеального газа и неидеальной плазмы, В сб. «Проблемы теории плазмы», Киев, 1972.
41. Б. Б. Кадомцев, Действующее поле в плазме, ЖЭТФ 33, 151 (1957).

42. Л. Спитцер, Физика полностью ионизованного газа, ИЛ, 1957.
43. Б. И. Давыдов, О влиянии колебаний плазмы на ее электропроводность и теплопроводность, В сб. «Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций», т. I, стр. 77, Изд. АН СССР, 1958.
44. Ю. Л. Климонтович, Потери энергии заряженных частиц на возбуждение колебаний плазмы, ЖЭТФ 36, 1405 (1959).
45. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, «Наука», 1964.
46. Г. Эккер, Теория полностью ионизованной плазмы, «Мир», 1974.
47. Л. П. Кудрик, Статистическая физика плазмы, Атомиздат, 1974.
48. В. А. Пучков, Эффекты поляризации в кинетическом уравнении для плазмы при воздействии высокочастотного электрического поля, Вестник МГУ 16, 385 (1975).
49. Ю. Л. Климонтович, В. Эбелинг, Квантовые кинетические уравнения для неидеального газа и неидеальной плазмы, ЖЭТФ 63, 905 (1972).
50. S. Ichimaru, Basic principles of plasma physics. A statistical approach, W. A. Benjamin, 1973 (Основные принципы физики плазмы, Атомиздат, 1975).
51. S. Ichimaru, I. P. Yakimenko, Transition probability approach to the theory of plasmas, Physica scripta 7, 198 (1973).
52. I. P. Yakimenko, A. G. Zagorodny, Transition probabilities, correlation functions and dielectric permittivity tensors for semibounded and bounded nonequilibrium plasma, Physica scripta 10, № 5 (1974).
53. В. С. Попов, И. П. Якименко, Электромагнитные флуктуации в полупространстве неравновесной плазмы, Препринт ИТФ-74-23Р, Киев, 1974.
54. А. Г. Ситенко, А. А. Гурин, О влиянии столкновений между частицами на флуктуации в плазме, ЖЭТФ 49, 1591 (1965).
55. P. Bhatnagar, E. Gross, M. Krook, A model for collision processes in gases I, Phys. Rev. 94, 511 (1954); E. Gross, M. Krook, II, Phys. Rev. 102, 593 (1956).
56. А. Н. Оравевский, Молекулярные генераторы, «Наука», 1964.
57. H. Naken, Light and Matter Ic. Enciclopedia of physics, C. ed S. Flugge, v. 25/2c, Springer-Verlag, 1970.
58. Волновые и флуктуационные процессы в лазерах, Под ред. Ю. Л. Климонтовича, «Наука», 1974.
59. С. В. Ганцевич, В. Л. Гуревич, Р. Катилос, Флуктуации в полупроводниках в сильном электрическом поле и рассеяние света горячими электронами, ЖЭТФ 57, 503 (1969).
60. Ш. М. Коган, А. Я. Шульман, К теории флуктуаций в неравновесном электронном газе, ЖЭТФ 56, 862 (1969).
61. П. М. Томчук, В. А. Шендеровский, Рассеяние и трансформация волн на флуктуациях в неравновесной плазме полупроводника, ЖЭТФ 62, 1131 (1972); П. М. Томчук, А. А. Чумак, Высокочастотные флуктуации в неравновесных электрон-фононных системах, УФЖ 18, 1625 (1973).
62. V. V. Bely, Yu. L. Klimontovich, Low-frequency nonequilibrium fluctuations in electron-phonon system, Physica 73, 327 (1974).

### К третьей части

1. H. Green, Boltzmann's equation in quantum mechanics, Proc. Roy. Soc. A66, 325 (1953).
2. Л. Каданов, Г. Бейм, Квантовая статистическая механика, «Мир», 1964.
3. K. Baerwinkel, S. Grossmann, On the derivation of the Boltzmann-Landau equation from the quantum mechanical hierarchy, Z. Phys. 198, 277 (1967).
4. K. Baerwinkel, Die Vielteilchen T-Matrix und ihre Anwendung in der Theorie realer Gase von mittlerer Dichte 1, 2, Z. Naturforschung 24a, 22, 38 (1969).

5. Ю. Л. Климонтович, В. Эбелинг, Квантовые кинетические уравнения для неидеального газа и неидеальной плазмы, ЖЭТФ 63, 905 (1972).
6. Ю. Л. Климонтович, В. Крэфт, Обменные эффекты в квантовых кинетических уравнениях для неидеального газа и неидеальной плазмы, ТМФ 19, 364 (1974).
7. R. Balescu, Approach to equilibrium of quantum plasma, Phys. of Fluids 4, 94 (1961).
8. В. П. Силин, Об интеграле столкновений для заряженных частиц, ЖЭТФ 40, 1768 (1961).
9. E. Wigner, On the quantum correction for thermodynamics equilibrium, Phys. Rev. 40, 749 (1932).
10. Ю. Л. Климонтович, В. П. Силин, О спектрах систем взаимодействующих частиц и коллективных потерях при прохождении частиц через вещество, УФН 70, 749 (1962).
11. К. П. Гуров, Основания кинетической теории, «Наука», 1966.
12. В. П. Силин, Введение в кинетическую теорию газов, «Наука», 1971.
13. D. Hoffman, J. Mueller, C. Curtiss, Quantum mechanical Boltzmann equation, J. Chem. Phys. 43, 2878 (1965).
14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, «Наука», 1964.
15. Р. Балеску, Статистическая механика заряженных частиц, «Мир», 1967.
16. Ю. А. Кухаренко, Некоторые вопросы кинетической теории неравновесных процессов в многосортовых квантовых системах, Канд. диссертация, ФИАН СССР, Москва, 1970.
17. Н. Н. Боголюбов, Лекции по квантовой статистике, Избранные труды, т. 2, стр. 287, «Наука думка», 1971.
18. Ю. Л. Климонтович, О методе вторичного квантования в фазовом пространстве, ЖЭТФ 33, 982 (1957).
19. Л. Д. Ландау, Теория ферми-жидкости, ЖЭТФ 30, 1058 (1956).
20. В. П. Силин, К теории вырожденной электронной жидкости, ЖЭТФ 33, 495 (1957); Колебания вырожденной электронной жидкости, ЖЭТФ 35, 1243 (1958).
21. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957.
22. Ю. Л. Климонтович, Статистическая теория неупругих процессов в плазме, I. Кинетические уравнения для кулоновской плазмы с учетом неупругих процессов, ЖЭТФ 52, 1233 (1967).
23. Ю. Л. Климонтович, В. Крэфт, Псевдопотенциал для слабо неидеальной плазмы с учетом поляризации среды, ТВТ 12, 239 (1974).
24. В. Л. Бонч-Бруевич, В. Б. Гласко, Энергетические уровни в дебаевском поле, Оптика и спектроскопия 14, 495 (1963); М. В. Ваврух, Решение уравнения Шредингера для одного класса центрально-симметричных потенциалов, УФЖ 18, 2012 (1973).
25. Б. А. Трубников, В. Ф. Елесин, Квантовые корреляционные функции в максвелловской плазме, ЖЭТФ 47, 1279 (1964).
26. W. Ebeling, W. Kraeft, D. Kremp, Quantum statistical second virial coefficient for real gases and plasmas, Beitr. Plasma Physik 10, 237 (1970).
27. W. Ebeling, Zur freien Energie von Quantenplasmen kleiner Dichte, Zur Quantenstatistik der Bindungszustände in Plasmen I, Ann. Phys. (Leipzig) 21, 315 (1968); 22, 383 (1969).
28. А. И. Ларкин, Термодинамические функции неизоэотермической плазмы, ЖЭТФ 38, 1896 (1960).
29. Г. Э. Норман, А. Н. Старостин, Термодинамика сильно неидеальной плазмы, ТВТ 38, 1896 (1960).
30. G. Keibg, Theorie des Quanten Plasmas, Quantenstatistik der Gase mit Coulomb — Wechselwirkung, Ann. Phys. (Leipzig) 12, 219, 354 (1963).
31. J. Dahler, D. Hoffman, Theory of transport and relaxation processes in polyatomic fluids, Wiley Interscience 13, 1970.

32. Л. Вальдман, Явления переноса в газах при средних давлениях, В сб. «Термодинамика газов», Под ред. В. С. Зуева, «Машиностроение», 1970.
33. С. В. Пелетминский, К теории кинетических уравнений при наличии связанных состояний, ТМФ 6, 123 (1971).
34. Е. Г. Колесниченко, О выводе кинетических уравнений для разреженных химически реагирующих газов, ТВТ 3, 854 (1971).
35. Е. С. Якуб, К кинетической теории реагирующих газов, ТВТ 10, 507 (1972).
36. Е. Г. Колесниченко, Кинетические уравнения для химически реагирующих газов, Отчет № 1509, Ин-т механики МГУ, 1973.
37. Ю. Л. Климонтович, Статистическая теория неупругих процессов в плазме, II. Процессы, обусловленные поперечным электромагнитным полем, ЖЭТФ 54, 136 (1968).
38. Ю. Л. Климонтович, Кинетические уравнения для химически реагирующих газов, УФН (1976).
39. W. Ebeling, W. Kraeft, D. Kremp, Bound states and ionization equilibrium in gaseous and in solid state plasmas, In Ergebnisse der Plasmaphysik und Gaselektronik (Hrsg. R. Rompe, M. Steenbeck) Band 5 (in press).
40. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Физматгиз, 1963.
41. Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, Физика ударных волн и высокотемпературные гидродинамические явления, «Наука», 1966.
42. И. Л. Бейгман, Л. П. Пресняков, О сечениях ионизации ионов электронным ударом, Препринт ФИАН, Москва, 1966.
43. В. Л. Гинзбург, Некоторые вопросы теории излучения при сверхсветовом движении в среде, УФН 69, 537 (1959).
44. Л. П. Кудрин, Статистическая физика плазмы, Атомиздат, 1974.
45. O. Petrus, On the quantum kinetic equation for molecular gases, Physica 71, 113 (1974).
46. J. Lowry, R. Snider, Kinetic theory of dimer formation and decay, J. Chem. Phys. 61, 2320 (1974); Quantum kinetic theory of Chemical recombination, J. Chem. Phys. 61, 2230 (1974).

